

悬索结构及其应用

曾桂香¹, 赵东江², 张树林³

(1. 濮阳工业学校, 河南 濮阳 457000; 2. 河南职业技术学院, 河南 郑州 450007; 3. 河南省交通学校, 河南 郑州 450052)

摘 要 :通过数学、力学推导 给出了悬索自重沿弦线(悬挂点连线)及沿索线均匀分布两种情况下的悬索曲线方程、受力计算及索线长度 并给出了工程应用实例 所得结论和公式具有一定的工程应用价值.

关键词 :悬索 ; 荷载 ; 张力

中图分类号 :O 31 文献标识码 :A

0 引言

悬索结构由于受力分析简单、设计简便、可靠且能发挥材料性能,因而在土建、桥梁以及电力电讯等工程中得到广泛应用.悬索应用的形式,按其受力情况可分为 3 类:1.自重沿弦线方向均匀分布(即自重沿两支点连线的直线方向均匀分布),如吊桥、悬挂电话总线等;2.自重沿索线方向均匀分布(即单位索长的重量相等),如高压输电线等;3.受有集中荷载的悬索(即除悬索自重外,还有集中荷载作用于悬索上),如高空索道(缆车)等.下面给出前两种悬索的力学分析与计算方法.

1 自重沿弦线方向均匀分布的悬索

如图 1 所示的悬索,设两悬挂点 A、B 不等高,A、B 间距离为 l(称为跨度),每单位长度上的荷载为 q.建立坐标系 oxy(坐标原点 o 在悬索最低点),在悬索中任取投影长为 Δx 的微段 CD,则该微段在张力 T_i、T_{i+1} 和荷载 qΔx 作用下平衡,如图 2 所示,其受力方程为

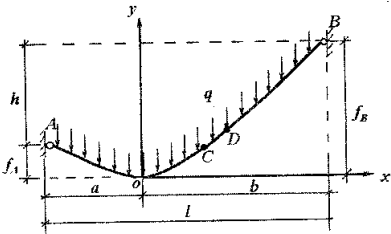


图 1 悬索受力示意图

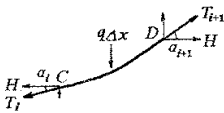


图 2 悬索微段受力

- T_isinα_i + T_{i+1}sinα_{i+1} = qΔx ; (1)

T_icosα_i = T_{i+1}cosα_{i+1} = H , (2)

则有

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}$. (3)

由此得悬索形状为一抛物线

y = qx²/(2H) , (4)

令 x = -a 和 x = b,即得到悬索最低点与悬挂点间的铅重距离为

f_A = qa²/(2H) , f_B = qb²/(2H) . (5)

若令图 2 中 C 点为坐标原点,即 α_i = 0,则由式(1)(2)求得悬索中任一点的张力为

T = √(H² + (qx)²) , (6)

由式(4)求得悬索总长度为

S = ∫_{-a}^b ABdS = ∫_{-a}^b √(1 + (y')²)dx = ∫_{-a}⁰ √(1 + ((2f_A/a²)x)²)dx + ∫₀^b √(1 + ((2f_B/b²)x)²)dx ,

上式按级数展开,取前两项,整理得:

S = l + 2/3(f_A²/a + f_B²/b) . (7)

2 自重沿索线均匀分布的悬索

计算方法和方法 1 一样,设图 1、2 中 CD 微

段长为 ΔS , q 为悬索单位长度自重. 则式 (1) 变为

$$-T_i \sin \alpha_i + T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} = q \Delta S, \quad (8)$$

由式 (2) (9) 解得悬索的微分方程为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \sqrt{1 + (y')^2}, \quad (9)$$

因 $\frac{dT}{q dS} \sin \alpha_i = \frac{dy}{dS}$, 故 $dT = q dy$, 则悬索中任一点的张力为^[1]

$$T = qy + H, \quad (10)$$

式 (9) 的解为^[1,2]

$$(y/c) = \operatorname{ch}(x/c) - 1, \quad (11)$$

式中: $c = H/q$; H 是悬索最低点 o 处的张力.

将式 (11) 右边展开为级数, 有

$$y = \frac{q}{2H} x^2 + \frac{q^3}{24H^3} x^4 + \frac{q^5}{720H^5} x^6 + \dots. \quad (12)$$

一般悬索结构 $f \ll l$, 取式 (12) 第一项, 最多前两项已可满足工程要求. 而取第一项, 正是方法 1 中的结果, 即式 (4) ~ (7) , 若取式 (12) 的前两项, 可用类似方法求出 f_A , f_B , T , H , S 的数值 (如后面的实例).

3 应用实例

某输电线路, 沿途每隔 450 m 设置一座架线塔, 若每座架线塔等高, 导线自重为 2 kg/m , 导线允许的垂度为 10.6 m , 求导线所受的最大拉力及两座架线塔之间的导线长度. 显然 $l = 450$ m , $f = 10.6$ m , $q = 2$ kN/m.

3.1 按悬链线式 (11) 求解

将式 (12) 取前两项, 且令 $x = \pm l/2$, 求得: $f = ql^2/(8H) + q^3 l^4/(384H^3)$, 代入数据后求得电线中点的拉力: $H = 46838.12$ N ; 最大拉力为: $T_{\max} = qy + H = qf + H = 47045.88$ N ; 导线长度

$$S = \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H} + \frac{q^3 x^3}{6H^3}\right)^2} dx,$$

按级数展开, 取前两项, 则有

$$S = \int_{-l/2}^{l/2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qx}{H} + \frac{q^3 x^3}{6H^3} \right)^2 \right] dx = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{q^4 l^5}{480H^4} + \frac{q^6 l^7}{32256H^6} = 450.6661 \text{ m}.$$

3.2 按抛物线法求解

$$\text{由式 (4) 得: } H = ql^2/(8f) = 46804.25 \text{ N};$$

$$\text{由式 (6) 得: } T_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(q \frac{l}{2}\right)^2} = 47002.99 \text{ N};$$

$$\text{由式 (7) 得: } S = l \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right] = 450.6658 \text{ m}.$$

由上述两种计算结果可以看出: 用抛物线代替悬链线法进行计算, 在 $f \ll l$ 的情况下, 产生的误差极小.

4 结束语

本文通过严格的数学、力学推导, 给出了悬索自重沿弦线及索线均匀分布两种情况下的悬索曲线方程、受力计算及索线长度. 通过实例说明, 悬索在 $f \ll l$ 的情况下, 用抛物线法代替悬链线法, 产生的误差非常小, 所得的公式及结论对工程设计和校核悬索都具有良好的实用意义. 用类似的方法可以求出中间受有集中荷载的悬索的计算公式.

参考文献:

- [1] 中国大百科全书(力学)编辑委员会. 中国大百科全书(力学) [M]. 北京: 中国大百科全书出版社, 1985. 513-514.
- [2] 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学(上) [M]. 北京: 北京大学出版社, 1982. 73-78.

Application of Suspended Cable Structure

ZENG Gui-xiang¹, ZHAO Dong-jiang², ZHANG Shu-lin³

(1. Puyang Industry School, Puyang 457000, China; 2. College of Vocational Technique Education of Henan Zhengzhou 450007, China; 3. Communications School of Henan Province Zhengzhou 450052, China)

Abstract: The curve equation, force calculation and the length of suspension in two conditions of suspended cable are given through the strict derivation using mathematical and mechanical method. The two conditions were the weight of suspension uniformly disturbed along the link and suspension line. The applications are given and the common expressions have some applied value in engineering.

Key words: suspended cable; load; tension