文章编号:1007-6492(2000)01-0103-02

求解大型稀疏线性方程组的行处理算法

安学庆[1], 秦体恒[2], 李学相[1]

(1.郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002;2.河南机电高等专科学校,河南 新乡 4530002)

摘　要:基于行处理算法的几何意义以及行处理算法的特点,提出了一个求解大型稀疏线性方程组问题的行处理算法,并讨论了该算法的收敛性及稳定性.数值实验表明,该算法具有收敛速度快、计算精度高等特点.

关键词:行处理;稀疏矩阵;控制序列

中图分类号:O 241.6　　**文献标识码**:A

0　引言

行处理方法[1]是求解大型稀疏线性方程组的一类实用的算法.设所要求解的方程式组为:

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{X}\rangle = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m). \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{X}\in R^n$;$X$是待求的解向量.

式(1)的缩写式为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\in R^{m\times n}$;$\boldsymbol{b}\in R^m$,$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{X}\in R^n$,$\boldsymbol{X} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$.

一般情况下,式(1)或式(2)可以是欠定($m<n$)的或是超定的($m>n$),当式(2)是适定即$m=n$且$\boldsymbol{A}$非奇异时,对于任意的$\boldsymbol{b}\in R^m$,式(2)有唯一解.

1　行处理方法的几何意义

当式(2)适定时,可用简单的几何解释方法引导出行处理方法.以$n=2$为例,此时$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{X}\rangle = b_1$和$\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{X}\rangle = b_2$,将分别表示平面上的二直线,而(2)的求解就是求这二直线的交点(如图1)在平面上任取一点X^0,从X^0向直线L_1作垂线,设垂足为X^1,过X^1再向L_2作垂线,设垂足为X^2,如此交替做下去,便可得到一个点列$\{X^k\}$.显然,它们将以直线的交点X^*为极限,并且当夹角θ接近于直角时,序列收敛将很快,当θ角接近于0时,序列收敛将很慢.

不难把这种思想推广于一般的情形,当$n\geqslant 2$时,记

$$H_i(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{X}\rangle = b_i\};$$

$$Q_i(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{X}\rangle \leqslant b_i\}.$$

称$H_i(X)$为以$\boldsymbol{a}_i$为法线向量的一超平面,$Q_i(X)$为负法线向量$-\boldsymbol{a}_i$所指向一侧的半空间,见图2.

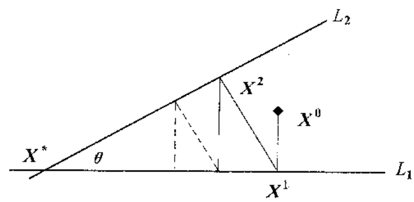

图1　行处理法生成点列

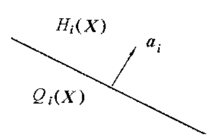

图2　半空间$Q_i(X)$

设X^0为$Q_i(X)$上任一点,过X^0向超平面H_i作垂线,设垂足为X^*,令$X = X^0 + \alpha \boldsymbol{a}_i$,这是超平面$H_i$的过点$X^0$的一条法线,把它代入$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{X}\rangle = b_i$,解出$\alpha$后得

$$\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}^0 + \frac{b_i - \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{X}^0\rangle}{\| \boldsymbol{a}_i \|}\boldsymbol{a}_i. \tag{3}$$

由于X^*是X^0到H_i的垂足,当$X\in H_i$时应有

$$\| \boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{X}^0 \| \leqslant \| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0 \|.$$

即X^*是带约束的优化问题

$$\begin{cases} \min \| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0 \|^2 \\ \boldsymbol{X} \in H_i \end{cases}. \tag{4}$$

收稿日期:1999-12-02;修订日期:2000-01-05

作者简介:安学庆(1964-),女,河南省郑州市人,郑州工业大学讲师,主要从事计算数学方面的研究.

的解,我们可用问题(4)的解作为 X^0 到 H_i 的垂足的定义,当需要考虑由 X^0 到若干超平面 H_i,H_j,H_k,…的交集的垂足时,自然地把 X^* 理解为问题(5)的解.

$$\begin{cases}\min \| X - X^0 \|^2 ; \\ X \in H_i \cap H_j \cap H_k, \cdots .\end{cases} \tag{5}$$

2 求解大型稀疏线性方程组的行处理算法

根据上述分析,可以给出一个用于求解问题(1)的行处理算法,具体算法步骤如下:

设 k 为任意正整数,i_k 是 k 用 n 去除所得的余数,记为 $i_k = k(\bmod\ n)$,当 $i_k = 0$ 时,表示 k 是 n 的倍数.

STEP 0 输入 $k = 0$,X^0,ITM,ITO = 0,EPSO,EPS (这里 k 是迭代循环变量,X^0 是初始迭代向量,ITM 是允许的最大控制迭代次数,ITO 是实际迭代次数,EPSO 是控制结束的精度,EPS 是迭代计算中的精度)

STEP 1 计算 i_k

SEPT 2 利用式(3)计算 X^k 到 $H_{i_{k+1}}$ 的垂足 X^{k+1}

SEPT 3 当 $i_k = 0$ 时,计算 $r_{i_k} = \langle a_{i_k}, X^k \rangle - b_{i_k}$ 并记 EPS = $| r_{i_k} |$

SEPT 4 当 $i_k \neq n - 1$ 时,$k = k + 1$ 转 STEP 1 否则

SPET 5 如果 EPS $\leqslant$ EPSO,输出 X^{k+1},ITO,并停止;否则 ITO = ITO + 1

SPET 6 若 ITO $\leqslant$ ITM,则 $k = k + 1$ 转 STEP 1 否则

SPET 7 输出 X^{k+1},ITO,停止.

3 算法讨论

上述算法称为行处理算法,有两条理由,一是每一次由 X^k 计算 X^{k+1} 时,因为要由 X^k 向 $H_{i_{k+1}}$ 超平面作垂足,而 i_k 是编号 1,2,…,n 中的一个,即由 X^k 计算 X^{k+1} 时只需用到增广矩阵中一个行的信息.其二是增广矩阵中的元素在计算过程中是不改变的,也就是说算法本身并没有对矩阵的结构形式如对称性、对角元非零等提出任何要求,这几条大体上可以刻划行处理算法的特点[2].

需要指出的是,由于行处理算法主要是面向大型稀疏矩阵的[3],算法中算术运算部分一定要把稀疏性的特点考虑进去,即严格遵守只有非零元才参加存储和计算的原则.另外,在行处理算法中,处理行的次序的选择是一个值得研究的问题,好的次序有益于算法效益的提高,在前若干次的迭代中,花一部分时间用于处理行次序的选择,以摸索规律是值得的,当用某种策略确定了行处理次序的选择后,这个次序一般说来就不一定是原来的平面编号的自然次序,而且各平面被调用以及被处理的频率也不一定相同.在上述算法中,控制序列是循环控制序列,即 $i_k = k(\bmod\ n) + 1$.

上述算法特别适用于求解大型稀疏线性方程组,根据矩阵的稀疏程度不同,相应算法的运行效率也不尽一致,上机实践表明,该算法与一些经典算法相比其运行效率是可接受的.

参考文献:

[1] CENOR Y. Row - action method for huge and sparse systems and their application[J]. SIAM Review,1981,23(4):444 - 466.

[2] LENT A CENOR Y. Extension of Hildreth 's row - action method for quadratic programing [J]. SIAM J Control Optim,1980,19(3):23 - 30.

[3] 李学相.一类大型稀疏问题的齐次化算法[J].郑州工业大学学报,1999,20(3):69 - 70.

Row - action Method for Huge and Spares Linear Equation

AN Xue - qing[1], Qin Ti - heng[2], LI Xue - xiang[1]

(1. Department of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Henan Mechanic and Electric Engineering College, Xinxiang 453002, China)

Abstract: In this paper, a new row - action method is given for solving huge and sparse linear systems, using Row - Action method. The convergence and stability of this algorithm are discussed. The numerical experiments show that this algorithm has certain practical value.

Key words: row - action; sparse systems; control sequence