文章编号:1007 - 6492(2000)01 - 0081 - 02

杨氏双缝实验光强分布的 Fourier 变换计算方法

关智武[1],孙长庚[2]

(1.郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002;2.华北水利水电学院信息工程系,河南 郑州 450045)

摘 要:对于杨氏双缝这一著名的波动光学实验,依据平面波衍射理论(RSD 理论),运用 Fourier 变换方法,计算杨氏双缝实验的光强分布.这种方法区别于一般文献中通过计算光程差来得出光强分布的方法,理论性较强.

关键词:杨氏双缝实验;平面波衍射理论;傅立叶变换

中图分类号:O 436.1 **文献标识码**:A

0 引言

光学中的杨氏双缝实验习惯上归类于双光束干涉实验,然而,干涉与衍射并不存在实质性的物理差别,两者都是相干光波的叠加问题.对于 Fresnel 双缝衍射,当缝宽趋于无限窄时,就成为杨氏双缝干涉.因此,可以用衍射理论来处理杨氏双缝实验.解决衍射问题,可以用 Huygens,Fresnel,Kirchhoff 等人建立的球面波衍射理论(HFK 理论),它是著名的 Kirchhoff 衍射积分公式的理论基础[1],也可以用 Rayleigh,Sommerfeld,Debye 等人建立的平面波衍射理论(RSD 理论).RSD 理论的基本思想是对于任一平面(例如衍射屏)上的复振幅分布作 Fourier 分析,各个空间 Fourier 分量可以视为沿不同方传播的平面波,在衍射场中任一其他点(例如观察屏上某点)的复振幅可以通过先计算这些平面波传播到该点的相移,然后将这些经过相移后的平面波求和而得到.其基本计算是 Fourier 变换和逆变换.本文应用 RSD 理论,通过 Fourier 变换来计算杨氏双缝实验的光强分布,从其中领会 Fourier 光学的一些基本思想.

1 杨氏双缝实验光强分布的计算

设在 xoy 平面(衍射屏)上有两条平行于 y 轴且关于 y 轴对称,相距为 $2a$ 的无限窄狭缝,并设波长为 λ 的单色光垂直照射衍射屏,紧靠衍射屏后表面的复振幅分布为 $U(x,y,0)$.观察屏与衍射屏平行,其间距离为 z,为方便计算,观察屏上的坐标也用 x,y 表示,那么,按照 RSD 理论(或称之为角谱传播方法),观察屏上的复振幅分布 $U(x,y,z)$ 为[2]

$$U(x,y,z)=\iint_{-\infty}^{+\infty}A_0(f_x,f_y)\cdot \exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}\right]\cdot \exp[\mathrm{j}2\pi(f_xx+f_yy)]\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y, \quad (1)$$

式中,

$$A_0(f_x,f_y)=\iint_{-\infty}^{+\infty}U(x,y,0)\cdot \exp[-\mathrm{j}2\pi(f_xx+f_yy)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ . \quad (2)$$

由式(2)可知,$A_0(f_x,f_y)$是衍射屏后表面复振幅分布 $U(x,y,0)$的 Fourier 变换;式(1)表明,观察屏上的复振幅 $U(x,y,z)$是平面波 $A_0(f_x,f_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_xx+f_yy)]$ 经过相移(乘以 $\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}\right]$)后对空间频率 f_x,f_y 的积分,其运算恰是 Fourier 逆变换.

对于上述杨氏双缝实验装置,衍射屏的复振幅分布不随坐标 y 变化.复振幅分布为

$$U(x,0)=\delta(x-a)+\delta(x+a)\ .$$

相应的 Fourier 变换为一维变换,由式(2)得

$$A_0(f_x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]\exp(-\mathrm{j}2\pi f_xx)\,\mathrm{d}x=\exp(-\mathrm{j}2\pi af_x)+\exp(\mathrm{j}2\pi af_x)\ . \quad (3)$$

将式(3)的结果代入式(1),可得观察屏上的复振

收稿日期:1999 - 11 - 16;修订日期:1999 - 12 - 26

作者简介:关智武(1941 -),男,河南省伊川县人,郑州工业大学副教授,主要从事 Fourier 光学方面的研究.

幅分布为

$$U(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\exp(-\mathrm{j}2\pi a f_x)+\exp(\mathrm{j}2\pi a f_x)]\cdot \exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}z\sqrt{1-(\lambda f_x)^2}\right]\cdot \exp(\mathrm{j}2\pi f_x x)\,\mathrm{d}f_x. \tag{4}$$

注意到$\sqrt{1-(\lambda f_x)^2}$必须为正实数(否则,将出现随传播而迅速衰减的倏逝波[2]),因此$(\lambda f_x)^2<1$.将$\sqrt{1-(\lambda f_x)^2}$展开,在 Fresnel 近似条件下取前两项,$\sqrt{1-(\lambda f_x)^2}\approx 1-\frac{1}{2}(\lambda f_x)^2$,代入式(4),经过整理可得

$$U(x,z)=\frac{1}{\sqrt{\lambda z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\cdot \left\{\exp[-\mathrm{j}\pi(\sqrt{\lambda z}f_x)^2]\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\frac{a-x}{\sqrt{\lambda z}}(\sqrt{\lambda z}f_x)\right]+\exp[-\mathrm{j}\pi(\sqrt{\lambda z}f_x)^2]\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\frac{-a-x}{\sqrt{\lambda z}}(\sqrt{\lambda z}f_x)\right]\right\}\cdot \mathrm{d}(\sqrt{\lambda z}f_x),$$

由 Fourier 变换公式[3]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mathrm{j}\pi\eta^2)\exp(-\mathrm{j}2\pi\zeta\eta)\,\mathrm{d}\eta=\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)\exp(\mathrm{j}\pi\zeta^2),$$

则

$$U(x,z)=\frac{1}{\sqrt{\lambda z}}\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{\lambda}z-\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot \left\{\exp\left[\mathrm{j}\pi\frac{(a+x)^2}{\lambda z}\right]+\exp\left[\mathrm{j}\pi\frac{(a-x)^2}{\lambda z}\right]\right\}.$$

观察屏上的光强分布为

$$R(x,z)=U(x,z)U^*(x,z)=\frac{1}{\lambda z}\left[2+\exp\left(\mathrm{j}4\pi\frac{ax}{\lambda z}\right)+\exp\left(-\mathrm{j}4\pi\frac{ax}{\lambda z}\right)\right]=4I_0\cos^2\left(\frac{2\pi ax}{\lambda z}\right). \tag{5}$$

式中:I_0为只有一条狭缝时,观察屏上的光强.

2 讨论

由式(5)可知,当$\frac{2\pi ax}{\lambda z}=\pm k\pi$,

即

$$x=\pm k\frac{z}{2a}\lambda,\quad I=I_{\max}=4I_0. \tag{6}$$

当 $\frac{2\pi ax}{\lambda z}=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$,

即

$$x=\pm(2k+1)\frac{z}{2a}\cdot\frac{\lambda}{2},\quad I=0. \tag{7}$$

条纹间距

$$\Delta x=\frac{z}{2a}\lambda. \tag{8}$$

式(6)、式(7)和式(8)与我们熟知的杨氏双缝(双光束)干涉明、暗条纹公式以及条纹间距公式完全相同.

参考文献:

[1] 关智武.基尔霍夫衍射公式中虚系数的解释[J].郑州工业大学学报,1998,19(4):112-113.

[2] 顾德门 J W.傅立叶光学导论[M].詹达三,译.北京:科学出版社,1976.54-58.

[3] 加斯基尔 J D.线性系统·傅立叶变换·光学[M].封开印,译.北京:人民教育出版社,1981.206.

Calculation of Intensity Distribution of Light for the Experiment of Young's Double Slits by the Method of Fourier Transform

GUAN Zhi-wu[1], SUN Chang-geng[2]

(1. Department of Mathematics, Science & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Department of Information Engineering, North China Institute of Water Conservancy & Hydroelectric Power, Zhengzhou 450045, China)

Abstract: For the famous experiment of Young's double slit, general physics books usually calculate the intensity of light with the calculating the difference of optical path. This paper, calculates the intensity of light according to the RSD theory about the diffraction of plane wave, in the experiment of Young's double slits with the method of Fourier transformation.

Key words: the experiment of Young's double slits; RSD theory of diffraction; Fourier transformation