

文章编号 :1007-649X(2000)01-0023-03

# 含柔性梁机械系统动力学分析的有限段方法

金国光<sup>1</sup>, 刘又午<sup>1</sup>, 张明成<sup>2</sup>, 王树新<sup>1</sup>, 张大均<sup>1</sup>

(1. 天津大学机械工程学院, 天津 300072; 2 郑州工业大学机械与电子工程学院, 河南 郑州 450002)

摘 要: 机械系统动态性能的好坏将直接影响系统的安全性与可靠性, 因此, 在对机械系统进行动力学分析时, 计及各部件(或构件)变形的影响就显得非常必要. 当系统中含有梁式结构的构件时(如凸轮机构、连杆机构等), 常应用有限段方法建立系统动力学模型并对其进行动力学分析. 依据 Kane 方程, 建立了梁式柔性体动力学的有限段模型, 并编制了该方法的应用程序. 算例表明, 有限段方法是分析梁式结构机械系统动态性能的一种简单、有效的方法.

关键词: 动力学; 梁式柔性体; 有限段方法

中图分类号: TH 112.2 文献标识码: A

## 1 系统运动学

有限段方法<sup>[1,2]</sup>是由有限元方法发展而来的. 其基本思想是: 将梁式柔性构件离散为有限个刚性梁段(见图 1). 段间用 3 个扭转弹簧, 3 个线弹簧及与之相对应的 6 个阻尼器相连接. 在小变形的条件下, 可用离散的梁段来描述柔性体的惯性特征, 用段间的弹簧和阻尼器代表柔性体的弹性和阻尼特性. 因此, 可应用 Kane 方法建立由段间相对(角)速率为广义速率的动力学方程.

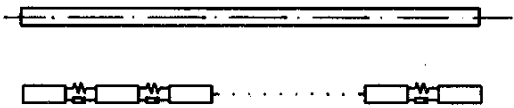


图 1 梁式构件的有限段模型

如图 2 所示,  $R$  为系统的惯性参考系, 设  $S_i$  为柔性体的第  $i$  梁段( $i = 1, 2, \dots, N$ );  $\theta_{in}$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 为段  $S_i$  相对段  $S_{i-1}$  方位角;  $u_{in}$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 为段  $S_i$  相对段  $S_{i-1}$  的位移. 在小变形条件下, 通过有限段的划分, 总可以使  $\theta_{in}$  和  $u_{in}$  为小量. 在图 2 中,  $O_i x_i y_i z_i$  为固定在  $S_i$  上的右手直角坐标系, 且  $x_i, y_i, z_i$  分别与  $S_i$  的中心惯性主轴相平行,  $x_i$  沿轴向,  $y_i$  和  $z_i$  沿横向,  $C_i$  为  $S_i$  的质心, 矢量  $\rho_i$  表示  $C_i$  相对于  $O_i$  的位置.  $Q_i$  为  $S_i$  在低序段  $S_{i-1}$  上的参考点, 当构件未变形时,  $Q_i$  与  $O_i$  重合; 当构

件变形时,  $\sigma_i$  给出  $O_i$  相对于  $Q_i$  的位置, 矢量  $\zeta_i$  给出  $Q_i$  相对于  $O_{i-1}$  的位置,  $O_{i-1}$  为固定在梁段  $S_{i-1}$  上的坐标原点.

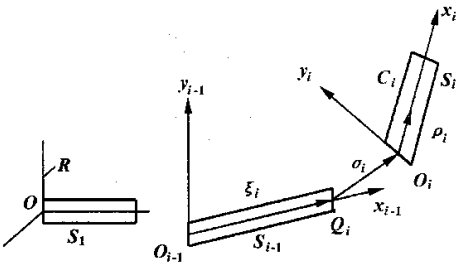


图 2 典型段的几何描述

由此, 可得到  $S_i$  的质心  $C_i$  在惯性参考系  $R$  中的位置矢量  $P_i$

$$P_i = \sum_{m=1}^i (\zeta_m + \sigma_m) + \rho_i, \quad (1)$$

即有

$$P_i = [ \sum_{\tau=1}^i SOS_{mn}^{\tau-1} (\zeta_{\tau n} + \sigma_{\tau n}) + SOS_{mn}^i \rho_{in} ] n_{om}. \quad (2)$$

$$SOS_{mn}^{\tau-1} = \delta_{mn} + ( \sum_{s=1}^{\tau-1} \theta_{\tau s} ) e_{msn}, \quad (3)$$

式中:  $\rho_{in}$  为  $\rho_i$  在段  $S_i$  坐标系上的投影;  $\zeta_{\tau n}$  和  $\sigma_{\tau n}$  分别为  $\zeta_\tau$  和  $\sigma_\tau$  在段  $S_i$  坐标系上的投影; 段间相对位移  $\sigma_{\tau n}$  为小量;  $SOS_{mn}^{\tau-1}$  为惯性参考系  $R$  与柔性体上第  $\tau-1$  段参考系  $S^{\tau-1}$  的方向余弦矩阵

收稿日期: 1999-10-30; 修订日期: 1999-12-30

作者简介: 金国光(1963-), 男, 辽宁省兴城县人, 天津大学博士研究生, 讲师, 主要从事机构学及多体系统动力学方面的研究.

万方数据

$SOS^{\tau-1}$  的分量  $\delta_{mn}$  为标准的  $\delta$  函数  $e_{msn}$  为标准排列符号,即

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}; (m, n = 1, 2, 3) \quad (4)$$

$$e_{msn} = \frac{1}{2}(m - s)(s - n)(n - m). \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (5)$$

由式(2)可求得梁段  $S_i$  之质心  $C_i$  的速度  $V_i$

$$V_i = \dot{P}_i = \frac{dP_i}{dt}. \quad (6)$$

又由运动叠加原理<sup>[1]</sup>可求得梁段  $S_i$  在惯性参考系  $R$  中的角速度  $\omega_i$

$$\omega_i = \sum_{j=1}^i \hat{\omega}_j. \quad (7)$$

式中  $\hat{\omega}_j (j = 1, 2, \dots, i)$  为段间相对角速度.

为进行动力学分析,引入广义速率  $y_l (l = 1, 2, \dots, 6N)$ :

$$y_l = \begin{cases} \omega_{1n} (l = 1, 2, 3); \\ V_{1n}^O (l = 4, 5, 6); \\ \dot{\theta}_{in} (l = 3i + n); \\ \dot{u}_{in} (l = 3N + 3(i-1) + n); \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, N) \quad (8)$$

式中  $\omega_{1n} (n = 1, 2, 3)$  为段  $S_1$  的角速度在惯性参考系  $R$  中的分量;  $V_{1n}^O (n = 1, 2, 3)$  为段  $S_1$  之参考点  $O$  在惯性参考系  $R$  中的速度分量.

由于柔性体离散为有限个刚性段,其建模过程与多刚体动力学建模过程相似<sup>[3]</sup>,故有关推导过程从略,本文仅给出运动分析结果.由运动学分析,可以得到典型段  $S_i$  的绝对角速度  $\omega_i$  和绝对速度  $V_i$ ,它们最终可以表示为系统广义速率  $y_l$  的线性组合<sup>[4]</sup>

$$\omega_i = \Omega_{ilm} y_l n_{om} (m = 1, 2, 3); \quad (9)$$

$$V_i = V_{ilm} y_l n_{om} (m = 1, 2, 3). \quad (10)$$

式中  $n_{om}$  为惯性参考系右旋单位矢量;  $\Omega_{ilm}$  和  $V_{ilm}$  分别为偏角速度和偏速度列阵.

将式(9)、式(10)对时间求导数,得到典型段  $S_i$  的角速度和加速度.

$$\alpha_i = (\dot{\Omega}_{ilm} y_l + \Omega_{ilm} \dot{y}_l) n_{om}; \quad (11)$$

$$a_i = (\dot{V}_{ilm} y_l + V_{ilm} \dot{y}_l) n_{om}. \quad (12)$$

## 2 系统动力学方程

由 Kane 方程,建立系统的动力学方程<sup>[4,5]</sup>

$$F_l + F_l^* = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, 6N). \quad (13)$$

式中  $F_l$  和  $F_l^*$  分别为与广义速率  $y_l$  相对应的广

义主动力和广义惯性力.

在小应变条件下,用有限段方法经离散化处理后的柔性梁的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K^i] \{q\}. \quad (14)$$

式中  $[K^i]$  为段间刚度阵;  $\{q\} = [\theta_{in}, u_{in}]^T$ .

由此,可得广义主动力

$$F_l = \begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial \theta_{in}} = M_{in} (l = 3i + n); \\ -\frac{\partial U}{\partial u_{in}} = F_{in} (l = 3N + 3(i-1) + n), \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (15)$$

式中  $M_{in}$  和  $F_{in}$  分别为段间接点力矩和接点力.

系统的广义惯性力为

$$F_l^* = R_i^* \frac{\partial V_i}{\partial y_l} + T_i^* \frac{\partial \omega_i}{\partial y_l} \quad (l = 1, 2, \dots, 6N). \quad (16)$$

式中  $R_i^*$  为段  $S_i$  上通过质心的  $C_i$  惯性力系主矢;  $T_i^*$  为惯性力系向质心  $C_i$  简化后的主矩.

由 Newton-Euler 方程

$$R_i^* = -m_i \cdot a_i, \quad (17)$$

$$T_i^* = -[I_i \cdot \alpha_i + \omega_i \times (I_i \cdot \omega_i)], \quad (18)$$

式中  $m_i$  和  $I_i$  分别为  $S_i$  的质量和中心惯性并矢.

$$I_i = I_{ilm} n_{om} n_{on} \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad (19)$$

将式(17)、(18)代入式(16)得

$$F_l^* = -\alpha_{lp} \dot{y}_p - h_l. \quad (20)$$

式中,

$$\alpha_{lp} = m_i V_{ilm} V_{ipm} + I_{ilm} \Omega_{ilm} \Omega_{ipn}; \quad (21)$$

$$h_l = m_i V_{ilm} \dot{V}_{ipm} y_p + I_{ilm} \Omega_{ilm} \dot{\Omega}_{ipn} y_p + e_{ghm} I_{ilm} \Omega_{ilm} \Omega_{ipg} \Omega_{iqn} y_p y_q. \quad (22)$$

将式(20)代入式(13),得到系统的动力学方程

$$\alpha_{lp} \dot{y}_p = F_l - h_l \quad (l, p = 1, 2, \dots, 6N). \quad (23)$$

式(23)就是梁式柔性体有限段方法的一般动力学方程.

## 3 数值仿真及算例

考虑到有限段方法的一般动力学方程(23)的形式,及对输出结果的要求,本文有限段方法用 MATLAB 语言进行编程.这是因为 MATLAB 语言具有如下的特点:(1)强大的图形功能;(2)可进行以矩阵为单元的运算;(3)有很丰富的库函数可供调用.本文在用 MATLAB 语言进行编程时用到了库函数程序 ode45.m,这给动力学系统仿真带来了极大的方便.现以直动推杆盘形凸轮机构为例来说明.

给定一平底直动推杆盘形凸轮机构,凸轮角

的速度为  $100 \pi \text{ rad/s}$  ,推程运动角为  $\pi$  ,推程为  $0.02 \text{ m}$  ,推程阶段以  $2 \text{ m/s}$  的速度等速运动.从动推杆的杆长为  $1.0 \text{ m}$  ,直径为  $0.01 \text{ m}$  ,其密度为

$7800 \text{ kg/m}^3$  ,弹性模量为  $2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  ,推杆上作用有轴向载荷  $2.0 \text{ N}$  .用有限段法进行动态仿真,仿真时间  $T = 0.001 \text{ s}$  .仿真结果见图 3.

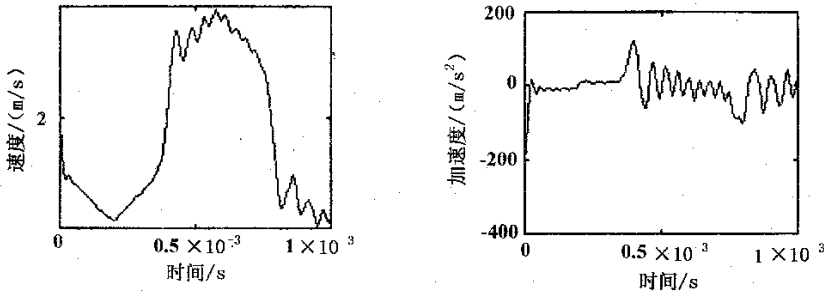


图 3 推杆端点的速度及加速度

4 结论

(1)有限段方法是对梁式柔性体系统进行动态分析的有效方法,其动力学方程式(23)与多刚体动力学方程有着完全相同的形式,因此便于计算机编程并对系统进行动态仿真研究.

(2)将有限段方法应用于凸轮机构,可有效地解释系统刚性冲击问题.由上述算例可知系统在起始点(即理论上的刚性冲击点)只有很大的柔性冲击(加速度的最大值为  $|a_{\max}| \approx 200 \text{ m/s}^2$  ),并无刚性冲击,这与机构学的结论不同.

参考文献:

[1] HUSTON R L. Multibody dynamics including the effects of

flexibility and compliance[ J ]. Computer and Structural , 1981 ,14( 5 ) :443 - 451 .

[ 2 ] HUSTON R L ,PASSAERELLO C E ,HARLAW M W. Dynamics of multi - rigid - body systems[ J ]. J of Appl Mech ,1978 ,45( 4 ) :889 - 894 .

[ 3 ] 金国光,张明成.空间 CSSRR——G 型摆盘式发动机的动力平衡[ J ]. 郑州: 郑州工学院学报 ,1993 ,14( 3 ) : 19 - 26 .

[ 4 ] 休斯敦,刘又午.多系统动力学(上、下册)[ M ]. 天津: 天津大学出版社 ,1987 ,1991 .

[ 5 ] HUSTON R L. Multibody dynamics——modeling and analysis method[ J ]. Appl Mech Rev ,1991 ,44( 3 ) :109 - 117 .

Finite - segment Method of Dynamic Analysis of Mechanical System  
with Beam - like Flexible Bodies

JIN Guo - guang<sup>1</sup> , LIU You - wu , ZHANG Ming - cheng<sup>2</sup> , WANG Shu - xin , ZHANG Da - jun

( 1. School of Mechanical Engineering , Tianjin University , Tianjin 300072 , China ; 2. College of Mechanical & Electronic Engineering , Zhengzhou University of Technology , Zhengzhou 450002 , China )

**Abstract** : It is well known that the safety and reliability is directly affected by the dynamic qualities of a mechanical system. So , it is necessary to consider the deformations of members of a mechanical system when we deal with dynamic problems. Dynamic equations of a mechanical system with beam - like flexible bodies are conveniently formed by means of finite - segment method——especially in system such as cam mechanism and linkage. In this paper , finite - segment dynamic equations for beam - like flexible body are given based on Kane 's equations. And then computing program is formed according to the dynamic equations. A numerical simulation example is given in order to show the application of this method. The results show that finite - segment method is a simple and effective analytical procedure for beam - like flexible bodies.

**Key words** 动力学 ; beam - like flexible body ; finite - segment method