

文章编号 :1007 - 649X(2000)01 - 0011 - 04

线性最优控制系统加权矩阵的仿真研究

冯冬青,崔 玮,杨秀红

(郑州工业大学电气信息工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要 :对于同一种控制对象设计最优调节器时,二次型指标中加权矩阵 Q 和 R 的选择不同,系统的动态性能也不一样.为使所设计的线性最优控制系统更好地适应生产实际需要,对二次型指标中的 Q 阵和 R 阵进行计算机仿真研究,研究表明 : Q 固定时, R 中的相应元素增大,系统的上升时间与稳态误差减小,而超调量和过渡过程时间增大; R 固定时, Q 中的相应元素增大,系统的上升时间与稳态误差增大,而超调量和过渡时间减小,说明 Q 和 R 阵的选择对系统动静态指标的影响遵循一定的规律,可根据实际系统要求选择合适的加权矩阵.

关键词 :线性二次型调节器;Riccati 方程;加权矩阵;仿真;响应性能指标

中图分类号:TP 273.1 文献标识码:A

0 引言

线性二次型调节器问题,简称 LQR(Linear Quadratic Regulator)问题,表示这样一种物理概念:若系统受外界扰动,偏离零状态后(即到达某一初态 X_0),应施加怎样的控制 U ,使系统回到零状态附近,并满足二次型目标函数为最小^[1].即对于系统提出二次型目标函数

$$\min J = \frac{1}{2} X^T(t_f) S X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt ;$$

$$\text{s.t. } \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) ; \\ X(t_0) = X_0.$$

式中: $R(t)$ 正定; $Q(t)$ 及 S 半正定; t_f 为终止时间; $X^T(t_f) S X(t_f)$ 表示考虑加权矩阵 S (重视某些分量,不重视某些分量)后的稳态误差; $\int_{t_0}^{t_f} X^T(t_f) Q(t) X(t) dt$ 表示考虑加权矩阵 Q 后的暂态误差的总度量; $\int_{t_0}^{t_f} U^T(t) R(t) U(t) dt$ 表示考虑加权矩阵 R 后的暂态过程中消耗的控制能量总和.

LQR 问题之所以受到普遍重视是因为它的提

法具有普遍意义,它不局限于某种物理系统,而且人们经过许多试探,证明这样的提法易于获得解析解,最为可贵的是能获得线性反馈的结构,并且它提供了一种统一的框架,把经典设计(单变量,非时变)也统一于其中.然而,二次型性能指标较为抽象,在实际工作中,人们通常习惯采用传统的系统性能指标来评价系统的响应,诸如度量系统精度问题和快速响应问题的系统误差和控制时间,以及于 40 年代末和 50 年代初经典控制提出的超调量和调整时间^[2].然而,我们却可以采用最优控制的方法对系统进行控制,通过对二次型目标函数中加权矩阵的选择来使得系统满足一定的性能指标要求.

1 线性二次型最优控制器设计

如果要使二次型目标函数取得最小值,可以首先构造一个 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{2} [X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t)] + \lambda^T(t) [A X(t) + B U(t)]. \quad (1)$$

当输入信号不受约束时,则可以对 Hamilton 函数进行求导,并令其值为零来求出最小值

$$\frac{\partial H}{\partial U} = - R U(t) + B^T \lambda(t) = 0. \quad (2)$$

求解出最优控制信号 $U^*(t)$ 为

收稿日期:1999 - 12 - 25,修订日期:2000 - 01 - 20

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(9904060600)

作者简介:冯冬青(1958 -),男,广东省佛山市人,郑州工业大学副教授,硕士,主要从事自动控制理论及应用方面的研究.

$$U^*(t) = R^{-1}B^T\lambda(t).$$
 (3)

可以证明, $\lambda(t)$ 矩阵可以由式 $\lambda(t) = -P(t)X(t)$ 求出, 这样可以将最优控制函数改写成

$$U^*(t) = -R^{-1}B^TP(t)X(t).$$
 (4)

且 $P(t)$ 矩阵可以由著名的微分型 Riccati 方程求出

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^TP(t) + P(t)BR^{-1}B^TP(t) - Q.$$
 (5)

可以看出, 对 LQR 问题的研究, 关键在于求解矩阵 Riccati 方程. 但上面的微分型 Riccati 方程求解起来是很困难的, 且 $U^*(t)$ 不易实现, 所以我们往往可以求出其稳态解^[3]. 例如前面目标函数中指定的终止时间 t_f 可以设置成 $t_f \rightarrow \infty$, 这样, 为保证系统状态渐近地趋于零值, 可以得出矩阵 $P(t)$ 趋近于一个常值矩阵, 且 $\dot{P}(t) = 0$, 这样式 (5) 中给出的微分型 Riccati 方程就简化为

$$-PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - Q = 0.$$
 (6)

上面给出的方程又称为代数 Riccati 方程. 代数 Riccati 方程的求解较为简单, 因为它的求解只涉及矩阵运算. 本文介绍一种简单的迭代方法来求解该方程. 令 $\Phi_0 = 0$, 则可以写出下面的迭代公式

$$\Phi_{i+1} = E^T\Phi_iE - (E^T\Phi_iG + W)(G^T\Phi_iG + H)^{-1}(E^T\Phi_iG + W) + Q.$$
 (7)

式中:

$$E = (I - A)^{-1}(I + A);$$
$$G = \alpha(I - A)^2B;$$
$$W = Q(I - A)^{-1}B;$$

$$H = R + B^T(I - A^T)^{-1}Q(I - A)^{-1}B.$$
 (8)

如果收敛于一个常数矩阵, 即 $\|\Phi_{i+1} - \Phi_i\| < \varepsilon$, 则可以得出代数 Riccati 方程的解为

$$P = \alpha(I - A^T)^{-1}\Phi_{i+1}(I - A)^{-1}.$$
 (9)

上面的迭代算法可以容易地用各种语言编程实现.

2 系统分析与仿真

2.1 最优反馈控制的结构

由式 (4) 可得出最优反馈控制结构, 如图 1 所示.

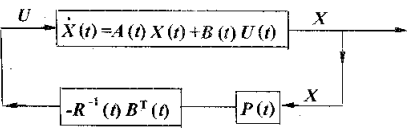


图 1 最优控制结构图

若令反馈增益矩阵(也称 Kalman 增益矩阵)

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t),$$

则
$$U(t) = -K(t)X(t).$$

这表明最优控制理论实质上完成了一件重要的工作: 最优极点配置. 尽管线性系统理论已告诉人们: 通过状态反馈, 极点可任意配置, 但是, 最优控制理论告诉人们: 极点如此配置, 才是最优的^[4~7].

通常系统的状态信号并不是可以直接测取到的, 所以往往需要为系统构造一状态观测器, 由该观测器来重构不可测的状态变量. 采用状态观测器后, 最优反馈控制系统的结构示于图 2.

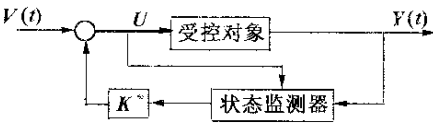


图 2 带有状态观测器的最优控制框图

这样得出的最优控制是“人工”意义下的最优控制, 因为它的效果将取决于加权矩阵 Q 和 R 的选取. 如果这些加权矩阵选择不当, 则可能得出不能满足实际系统要求的解, 就更谈不上“最优”了.

下面就加权矩阵对系统响应性能指标的影响进行研究和分析, 并给出满足一定性能指标要求的两类模型的最优控制加权矩阵的选取方法.

2.2 对积分与惯性环节串联的系统的研究

系统方框图如图 3 所示.

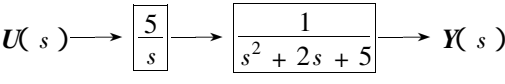


图 3 三阶系统方框图

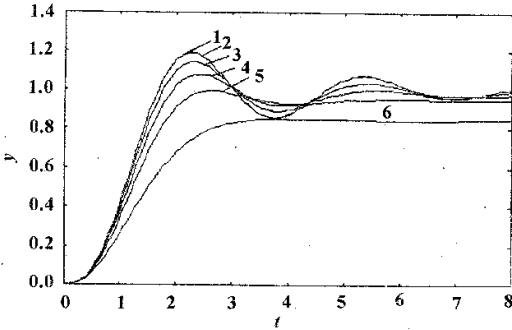
从模型方框图中可以得出系统的状态方程, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = [1];$$
$$C = [0 \ 0 \ 5]; D = 0.$$

系统对应于 R, Q 阵变化的阶跃响应曲线分别如图 4、图 5 所示.

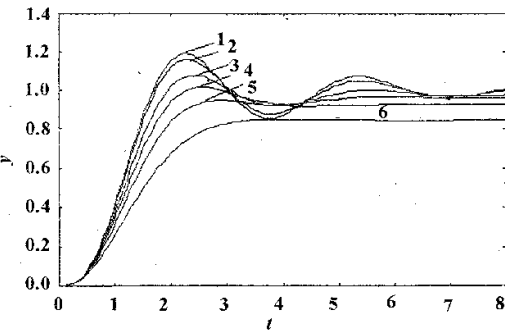
(1) 当加权矩阵 R 中相应元素增大时, 说明对控制能量要求比较严格, 从仿真结果(如图 4)可以看出, 这时导致在过渡过程的起始部分, 系统的超调量随之增加, 上升时间减少, 但过渡过程时间却相应的变大了. 且随着 R 中相应元素的增大, 系统最终的稳态误差逐渐减小, 直至达到消除静差为止. 当 $R \rightarrow \infty$ (本例中)时, 由矩阵方程解得的反馈增益矩阵 $K \rightarrow 0$, 说明此时的最优控制对系统性能的影响非常小, 这从仿真图中可以看出,

施加最优控制之后的系统的阶跃响应曲线与未施加时的响应曲线重合.当 R 较小时,反馈增益矩阵 K 较大,此时系统的稳态误差较大,且使系统丧失了原先一些较好的性能指标.对于此系统,取 $R = 3, Q = \text{diag}(1, 1, 1)$,得出 $K = [0.1909, 0.2333, 0.0332]$ 时,系统的控制效果较好.



曲线 1 中 $R = 0, Q = \text{diag}(0, 0, 0)$; 曲线 2 中 $R = 100, Q = \text{diag}(1, 1, 1)$; 曲线 3 中 $R = 3, Q = \text{diag}(1, 1, 1)$; 曲线 4 中 $R = 1, Q = \text{diag}(1, 1, 1)$; 曲线 5 中 $R = 0.4, Q = \text{diag}(1, 1, 1)$; 曲线 6 中 $R = 0.1, Q = \text{diag}(1, 1, 1)$.

图 4 三阶系统 R 变化对系统性能的影响



曲线 1 中 $R = 0, Q = \text{diag}(0, 0, 0)$; 曲线 2 中 $R = 1, Q = \text{diag}(0.2, 0.2, 0.2)$; 曲线 3 中 $R = 1, Q = \text{diag}(1, 1, 1)$; 曲线 4 中 $R = 1, Q = \text{diag}(2, 2, 2)$; 曲线 5 中 $R = 0.4, Q = \text{diag}(4, 4, 4)$; 曲线 6 中 $R = 0.1, Q = \text{diag}(10, 10, 10)$.

图 5 三阶系统 Q 变化对系统性能的影响

(2) 当加权矩阵 Q 中相应元素减小时,说明系统对暂态误差要求降低.从图 5 中可以看出,随着 Q 中相应元素的减小,系统阶跃响应的超调量增大,过渡过程时间增长,上升时间减少,稳态误差减小.与 R 增大时相同, Q 较小时,反馈增益阵 K 也较小,因此最优控制对系统性能影响较小, Q 对角阵元素为 0.2 时,最优控制后的系统的阶跃响应曲线与未控制前的响应曲线非常接近.

2.3 对典型二阶系统的研究

系统方框图如图 6 所示.

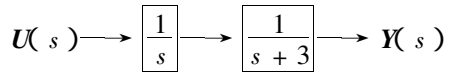
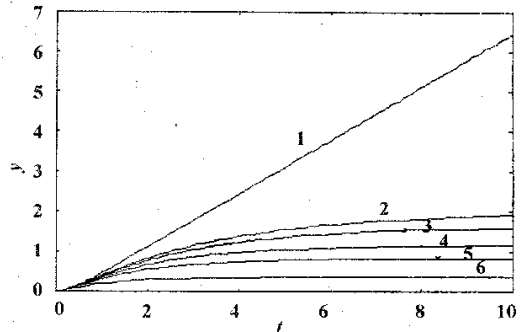


图 6 二阶系统方框图

变换后的状态方程为

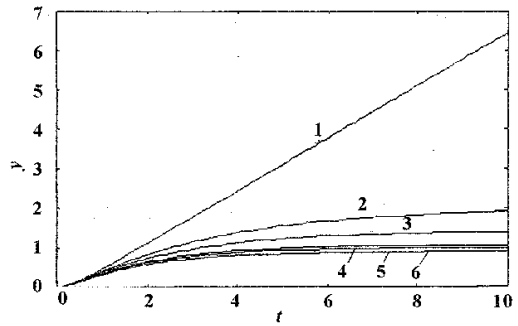
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U, Y = [0 \ 1] X.$$

本系统对应于 Q, R 阵变化的阶跃响应曲线分别如图 7、图 8 所示.



曲线 1 中 $R = 0, Q = \text{diag}(0, 0)$; 曲线 2 中 $R = 3, Q = \text{diag}(3, 3)$; 曲线 3 中 $R = 2, Q = \text{diag}(3, 3)$; 曲线 4 中 $R = 1, Q = \text{diag}(3, 3)$; 曲线 5 中 $R = 0.5, Q = \text{diag}(3, 3)$; 曲线 6 中 $R = 0.1, Q = \text{diag}(3, 3)$.

图 7 二阶系统 R 变化对系统性能的影响



曲线 1 中 $R = 0, Q = \text{diag}(0, 0)$; 曲线 2 中 $R = 1, Q = \text{diag}(1, 1)$; 曲线 3 中 $R = 1, Q = \text{diag}(2, 2)$; 曲线 4 中 $R = 1, Q = \text{diag}(3.5, 3.5)$; 曲线 5 中 $R = 0.4, Q = \text{diag}(4, 4)$; 曲线 6 中 $R = 0.1, Q = \text{diag}(5, 5)$.

图 8 二阶系统 Q 变化对系统性能的影响

(1) 从图 7 中可以看出,随着加权矩阵 R 中相应元素的增大,系统的稳态值增大,过渡过程时间增长.但经过对 R 阵的选取,可以使系统最终消除静差,且使得系统的过渡过程时间满足性能指标要求.当 R 取较大值时,由 Riccati 方程求得的系统反馈增益 K 较小,反馈增益对系统性能影响也较小,直至当 $R \rightarrow \infty$ 时,两条曲线重合.

(2) 当 Q 中相应元素增大时,对系统动态指标较重视,系统的稳态值减小,过渡过程时间减

小.对于本系统,当 $R = 1$, $Q = \text{diag}(4 \ 4)$ 时,反馈增益矩阵 $K = [1.1231 \ 2.0000]$,此时系统的稳态值为 0.9957,稳态误差趋近于零,且从图中可以看出,过渡过程时间也较小.

3 结 论

(1)加权矩阵 Q 固定时,随着 R 中相应元素的增大,系统的上升时间减少,稳态误差减小,但相应系统的超调量却增大,过渡过程时间也增长.因此,选取时应取一适中的 R 使得超调量和过渡过程时间都不至于太大;

(2)加权矩阵 R 固定时,随着 Q 中相应元素的增大,系统的上升时间增大,稳态误差增大,但系统的超调量与过渡过程时间却减小了.通过对 Q 阵的选取,使系统满足一定性能指标要求的同时,还要兼顾其他的响应性能指标.因此, Q 阵不应过大和过小.

(3) Q , R 阵的选取要根据实际系统对性能指标的要求,参考本文给出的仿真结果和选取方法进行选择.

参考文献：

[1] 吴受章.应用最优控制[M].西安:西安交通大学出版社,1988.

[2] 胡中楫,邹伯敏,林冬青,等.最优控制原理及应用[M].杭州:浙江大学出版社,1988.

[3] 薛定宇.控制系统计算机辅助设计——MATLAB 语言及应用[M].北京:清华大学出版社,1997.

[4] 蔡宣三.最优化与最优控制[M].北京:清华大学出版社,1982.

[5] CHEN Chi - Tsong.线性系统理论与设计[M].王纪文,译.北京:科学出版社,1988.

[6] 冯冬青,谢宋和.最优离散控制系统的参数化设计[J].郑州工学院学报,1993,14(1):96 - 101

[7] 冯冬青,谢宋和.关于二次型最优极点配置的几个问题[J].郑州工学院学报,1995,16(2):57 - 63.

Simulation Research on the Weighted Matrix of the Optimal Linear System

FENG Dong - qing , CUI Wei , YANG Xiu - hong

(College of Electrical & Information Engineering Zhengzhou University of Technology Zhengzhou 450002 ,China)

Abstract :When the optimal regulator is designed for the same controlled system ,if the weighted matrix Q and R are different and the response performance will be different too. In order to make the designed linear optimal system meet the practical production requirements better ,we must research the quadrics criteria Q and R through computer simulation. The results of the research show that :when the matrix Q is fixed ,the homological element in the R will increase and the rise time & steady - state error of the system will decrease ,but the overshoot & response time of the system will increase ;when the R is fixed ,the homological element in the Q will increase too ,however ,the rise time & steady - state error will increase and the overshoot & response time will decrease. According to the above narrative ,it illustrates that the changing of the weighted matrix Q and R does affect the performance criteria and there are some rules for it ,and that according to the choices of the Q and R ,the performance criteria of the response will meet the requirements of the practical production.

Key words :linear quadratic regulator ; Riccati equation ; weighted matrix ; simulation ; performance criteria of the response