文章编号:1007-6492(1999)03-0063-03

马尔可夫链在企业经济活动分析中的应用

陈建梅[1]，周世国[1]，张　斌[2]

(1.郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002；2.郑州工业大学建筑系,河南 郑州 450002)

摘　要：为了科学地预测企业所关心的各项经济指标,以便为企业的未来行为作出正确的决策方案,需用适当的数学模型和方法对企业的经济活动进行定量的研究.基于经济活动的复杂、多变性及常有许多随机性因素的特点,针对两种常见的经济问题,分别建立了相应的马尔可夫链模型,应用马尔可夫链的相关理论,巧妙地构造转移概率矩阵,只通过简单的矩阵运算,便迅速解决问题.实例表明:马尔可夫链模型及方法在企业经济活动分析中是可行和实用的,可广泛用于解决企业中常见的预测及决策问题.

关键词：马尔可夫链；经济活动分析；利润；转移矩阵

中图分类号：O 211.62　　**文献标识码**：A

0　引言

随着我国社会主义市场经济的不断发展,科学技术的进步,经济管理体制改革的深入和企业经营机制的转变,企业不仅要利用经济活动分析这一管理经济的重要方法,分析企业的生产经营活动,而且还要用来分析企业的经济环境,了解国内外市场情况和社会需求的变化,以便随着市场和社会需求的不断变化,及时调整生产经营活动,增强竞争力,从而使企业适应商品经济的要求,健康发展.因此,企业经济活动分析在企业的经营管理中发挥着日益重要的作用,它对事后实事求是地分析、总结企业完成的经济活动和事前科学地预测、判断企业未来的经济活动都是必不可少的[1].本文探讨马尔可夫链在企业经济活动分析中的几个应用实例.

1　马尔可夫链模型

所谓马尔可夫链是一类时间参数离散,状态空间为可列集或有限集且具有马尔可夫性(也称无后效性)的随机过程[2,3].通俗地讲,设有某个随机变化的实际系统Σ,按照Σ的发展,时间离散化为 $n=0,1,2,\cdots$,对每个时刻 n,Σ的状态用随机变量 $X_n(\omega)$表示.不妨设 X_n 可处于 m 个状态,即 $X_n=1,2,\cdots,m$.从 $X_n=i$ 到$X_{n+1}=j$ 的转移概率记为 p_{ij}.如果Σ的取值只取决于 X_n 的取值及转移概率p_{ij},而与以前的状态即与 $X_{n-1},X_{n-2},\cdots$ 的取值无关,那么这种性质称为马尔可夫性或无后效性,而具有这种性质的时间参数离散,状态个数有限的随机系统统称为马尔可夫链.

2　应用实例

一个庞大而复杂的经济系统一般总会受到多方面的不确定因素的影响,因此可将它看作一个随机系统,而且这种系统的演变过程往往具有无后效性,这样就视之为一个马尔可夫链,从而可用有关马尔可夫链的理论来分析企业的经济活动.

问题1　某公司每年最多能投资两项规模相同的项目,根据历年投资项目的统计资料分析,可得该公司投资项目数的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$.

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix},$$

其中:$p_{ij}(i,j\in\{0,1,2\})$为该公司今年投资 i 项项目,明年投资 j 项项目的概率.

在多数经济系统中,伴随着它的状态逐步转移,常有一系列利润的转移如当系统由状态 i 进一步转移至状态j 时,获得的利润记作 r_{ij},则由全体 $r_{ij}(i,j\in S$,所有可能状态之集)构成的矩阵称为利润矩阵,并记为 $\boldsymbol{R}=[r_{ij}]$, $r_{ij}>0$,则表示盈

收稿日期:1999-03-11;**修订日期**:1999-05-12

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(984050700)

作者简介:陈建梅(1965-),女,河南省内黄县人,郑州工业大学讲师,主要从事矩阵理论及随机过程方面的研究.

利；$r_{ij}<0$，则表示亏损；$r_{ij}=0$，则表示不亏不盈．在经济系统的演变进程中，因其状态的转移是随机的，故在每一阶段获取的利润也是随机的，而且利润取值的概率可由状态转移概率来确定．我们关心的问题往往就是如何预测系统经 n 步转移后获取的利润，实际上也就是它的期望（平均）利润．在此例中，假设与 $\boldsymbol{P}$ 相应的利润矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -20 & 10 & 20 \\ -10 & 20 & 40 \\ 10 & 40 & 60 \end{bmatrix}(\text{万元}),$$

试预测该公司经 n 年后在项目投资中获取的期望利润．

令 $V_i(n)$ 为公司今年投资 i 个项目经 n 年后总的期望利润，又规定 $V_i(0)=0, i=0,1,2$，即设初始利润为零．显然，由

$$V_i(1)=\sum_{j=0}^{2}P_{ij}r_{ij};$$

$$V_i(2)=\sum_{j=0}^{2}P_{ij}[r_{ij}+\sum_{k=0}^{2}P_{jk}r_{jk}]=\sum_{j=0}^{2}P_{ij}[r_{ij}+V_j(1)].$$

类推地

$$V_i(n)=\sum_{j=0}^{2}P_{ij}[r_{ij}+V_j(n-1)], n=1,2,\cdots. \tag{1}$$

若记 $\boldsymbol{V}(n)=[V_0(n),V_1(n),V_2(n)]'$，那么式(1)可表示为矩阵形式：

$$\boldsymbol{V}(n)=\boldsymbol{V}(1)+\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}(n-1), n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

利用此公式就可预测该公司今后任意 n 年的期望利润．

现以 $n=3$ 为例，该公司今后3年的期望利润计算如下：

$$\begin{cases} V_0(1)=0.1\times(-20)+0.3\times10+0.6\times20 \\ \quad =13\text{万元}; \\ V_1(1)=0.3\times(-10)+0.3\times20+0.4\times40 \\ \quad =19\text{万元}; \\ V_2(1)=0.3\times10+0.1\times40+0.6\times60 \\ \quad =43\text{万元}. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{V}(2)=\boldsymbol{V}(1)+\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}(1)=\begin{bmatrix}13\\19\\43\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.6\\0.3 & 0.3 & 0.4\\0.3 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\19\\43\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45.8\\45.8\\74.6\end{bmatrix}(\text{万元});$$

$$\boldsymbol{V}(3)=\boldsymbol{V}(1)+\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}(2)=\begin{bmatrix}13\\19\\43\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.6\\0.3 & 0.3 & 0.4\\0.3 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}45.8\\45.8\\74.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}76.08\\76.32\\106.08\end{bmatrix}(\text{万元})$$

问题2　某公司经营管理机构由经理 M、副经理 V、经理秘书 M_s 与副经理秘书 V_s 4人组成，洽谈生意仅由一位成员接待，该成员可以独立执行这项任务，也可把它转给另一位成员处理，甚至还可能将此任务放在一边永不执行．现在把完成任务与将任务放在一边永不执行依次分别看作为两个吸收状态 a 和 b，将4位成员 M,V,M_s,V_s 看作4个非吸收状态．根据这4人日常工作的规律，经理喜欢把项目分转给他的秘书或副经理，副经理习惯于把他收到的项目的3/4转给他的秘书，剩下的由他亲自完成或放在一边．每个秘书自己完成收到项目的3/8，放在一边的占1/8，其余的一半送给另一秘书，一半还给他的经理，以听取进一步的指示．据此可借助转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 来描绘上述规律，容易写出 $\boldsymbol{P}$ 及其子矩阵 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{Q}$ 如下：

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ M\\ V\\ M_s\\ V_s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & M & V & M_s & V_s \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 3/4\\ 3/8 & 1/8 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4\\ 3/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}\end{array}; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{array}{c} \\ M\\ V\\ M_s\\ V_s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1/8 & 1/8\\ 3/8 & 1/8\\ 3/8 & 1/8 \end{bmatrix}\end{array}; \tag{4}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{array}{c} \\ M\\ V\\ M_s\\ V_s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M & V & M_s & V_s \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3/4\\ 1/4 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}\end{array}. \tag{5}$$

由此经计算可得

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}=\begin{array}{c} \\ M\\ V\\ M_s\\ V_s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M & V & M_s & V_s \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.2 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 0.075 & 1.3 & 0.3 & 1.05\\ 0.325 & 0.3 & 1.3 & 0.55\\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 1.4 \end{bmatrix}\end{array};$$

$$(I-Q)^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{array}{c}M\\V\\M_s\\V_s\end{array}\begin{bmatrix}3.6\\2.725\\2.475\\2.3\end{bmatrix};$$

$$(I-Q)^{-1}=\begin{array}{c} \\ M\\V\\M_s\\V_s\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}a & b\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\0.67 & 0.33\\0.73 & 0.27\\0.725 & 0.725\end{bmatrix}\end{array}. \quad (6)$$

据文献[1]知,$(I-Q)^{-1}[1,1,1,1]'R$ 与 $(I-Q)^{-1}R$ 分别依次表示从状态 M 或 V,M_s 或 V_s 出发,平均吸收时间与吸收概率,在与公司商谈交易时,式(6)能帮助我们做出决策,比如最好选择与经理秘书接洽,因为相比之下在他手上生意被搁置一边的概率(0.27)最小.最好不要与副经理接洽,因为相比之下在他手上完成交易的可能性(0.67)最小.具体经办时最好交给副经理秘书办理,因为相比之下他完成此任务所需的平均时间最短,若交给经理办理则是最缓慢的.

马尔可夫链理论在企业经济活动分析中的应用广泛而深刻,作为计量经济学中的一个强有力的工具,它的作用会日益引起重视.

3 结束语

经济活动具有复杂、多变性及带有许多随机因素的特点,本文应用马尔可夫链的理论方法,针对经济实例,建立了马尔可夫链模型,模型不仅全面考虑了实例中的随机因素,而且模型的求解手段简单,仅为矩阵运算.此方法还具有广泛的适用性,易于推广普及.

参考文献:

[1] 马英麟,王俊生,肖镜元.工业企业活动分析[M].北京:中国人民大学出版社,1998.

[2] 何声武.随机过程导论[M].上海:华东师范大学出版社,1989.

[3] 王梓坤.随机过程论[M].北京:科学出版社,1989.

Application of Markov Chains in Economic Activities Analysis

CHEN Jian-mei[1], ZHOU Shi-guo[1], ZHANG Bin[2]

(1. Department of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Department of Architecture, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: To scientifically forecast numerical indexes which enterprises are concerned with in their economic activity, or to make a correct strategic decision in the future, suitable mathematical model and method are needed. Economic activity has the characteristics of complexity, changeability and randomness. In this paper, according to two real economic problems of different types, Markov models are estabished respectively, and the transition probability matrixs are constructed. Based on the relevent theory on Markov chains, the forecasting problem 1 and the decision problem 2 are solved respectively. The main computing method is through matric operation. Solutions of two problems show that Markov model is practiable and feasible, and it can be widely applied to the solution of all other forecasting problems and the decision problems in enterprises.

Key words: Markov chains; economic activities analysis; profit; transition matrix