

文章编号:1007-6492(1999)02-0073-04

# 矩形薄板动力分析的集中质量法

梁远森<sup>1</sup>, 许琪楼<sup>1</sup>, 李峰<sup>2</sup>, 李颖清<sup>3</sup>

(1. 郑州工业大学土木建筑工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 中国通信建设第四工程局, 河南 郑州 450052; 3. 郑州市建设委员会, 河南 郑州 450052)

**摘要:** 采用集中质量法分别对四边支承、三边支承一边自由、一对边支承一对边自由的矩形薄板进行了动力分析, 并用子空间正迭代法编制了相应的程序. 该方法可以计算上述边界条件矩形板振动的各阶振动频率及其相应振型, 同已有精确解或有限元结果相比较, 其计算结果吻合较好. 本方法还可以用于其他边界条件矩形板的动力分析.

**关键词:** 集中质量法; 动力分析; 矩形板

**中图分类号:** TU 375.2 **文献标识码:** A

## 0 前言

弹性薄板广泛应用于工程各领域. 在动力荷载作用下, 板的动力性能对板的工作有很大的影响, 但精确计算薄板在横向自由振动下的频率和振型十分困难, 仅有极少数边界条件的矩形板(例如具有一对边简支的矩形板)有精确解. 当边界条件复杂时, 常利用能量法、差分法等近似方法, 而采用这些方法也只能得到板的基本频率或少数几个频率, 不能得到或难以得到其相应的振型. 采用有限元法虽可以得到令人满意的解答, 但网格划分不够密时, 其结果有较大的误差. 本文采用集中质量法对矩形板进行了动力分析, 它可以很方便地计算出矩形板的各阶频率和振型, 且具有很高的精度.

## 1 板的自由振动方程

图1所示边长为  $a, b$  的矩形板, 现沿  $x$  方向划分为  $k_1$  个网格, 沿  $y$  方向划分为  $k_2$  个网格, 将每个网格质量集中到网格中心, 无限自由度的矩形板即转化为  $k_1 \times k_2$  个自由度的多质点体系. 其自由振动的柔度方程为

$$w + DM\ddot{w} = 0 \quad (1)$$

式中:  $w$  表示质点的位移向量;  $\ddot{w}$  为质点的加速度向量;  $M$  为结构的质量矩阵, 它为对角阵;  $D$  为

柔度矩阵. 柔度系数  $\delta_{ij}$  表示在第  $j$  质点作用一个横向单位力而在第  $i$  质点所引起的挠度.

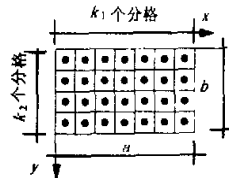


图1 矩形板多自由度质点体系

## 2 柔度矩阵 D 的形成

矩形板在集中力作用下弯曲挠度的计算采用以下方法: 设板在  $x = \zeta, y = \eta$  点上作用一向下的单位集中力, 其弯曲挠度解  $w = w_1 + w_2$ , 其中  $w_1$  为弯曲通解,  $w_2$  为弯曲特解,  $w_1$  与板的边界条件有关.

### 2.1 弯曲通解 $w_1$ 的选取

图2所示四边支承矩形板<sup>[1]</sup>

$$w_1 = \sum_{m=1,2,3}^{\infty} (A_m \text{sh}\alpha y + B_m \text{ch}\alpha y + C_m \alpha y \text{sh}\alpha y + D_m \alpha y \text{ch}\alpha y) \sin \alpha x + \sum_{n=1,2,4}^{\infty} (E_n \text{sh}\beta x + F_n \text{ch}\beta x + G_n \beta x \text{sh}\beta x + H_n \beta x \text{ch}\beta x) \sin \beta y, \quad (2)$$

式中:  $\alpha = m\pi/a; \beta = n\pi/b; A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$  为待定系数. 式中级数  $\sum_{m=1,2,3}^{\infty} \sin \alpha x$  符合

收稿日期:1999-01-28; 修订日期:1999-03-20

作者简介:梁远森(1968-),男,广西省浦北县人,郑州工业大学硕士研究生.

$x = 0$  和  $x = a$  为支承边的变形特点;级数  $\sum_{n=1,2,3}^{\infty} \sin n\beta y$  符合  $y = 0$  和  $y = b$  为支承边的变形特

点,且它们分别在区间  $[0, a]$  和  $[0, b]$  上具有正交性.

图 3 所示三边支承一边自由的矩形板<sup>[2]</sup>

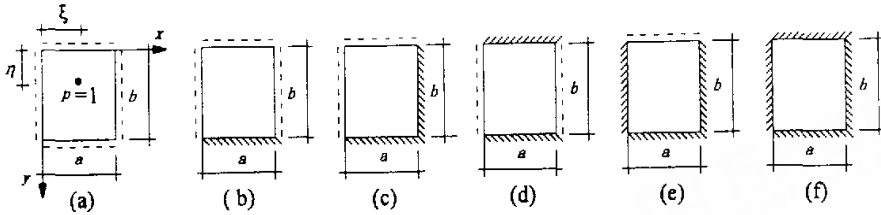


图 2 四边支承矩形板

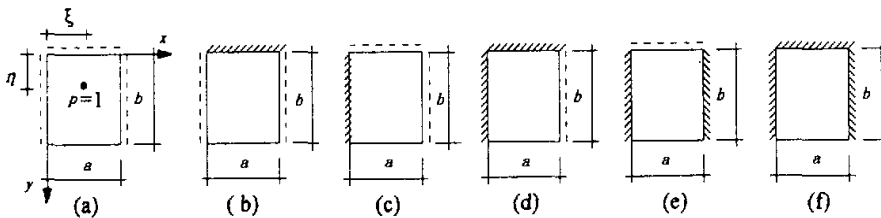


图 3 三边支承一边自由矩形板

$$w_1 = \sum_{m=1,2,3}^{\infty} (A_m \text{sh} \alpha y + B_m \text{ch} \alpha y + C_m \alpha y \text{sh} \alpha y + D_m \alpha y \text{ch} \alpha y) \sin \alpha x + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (E_n \text{sh} \gamma x + F_n \text{ch} \gamma x + G_n \gamma x \text{sh} \gamma x + H_n \gamma x \text{ch} \gamma x) \sin \gamma y, \quad (3)$$

式中:  $\alpha = m\pi/a$ ;  $\gamma = n\pi/(2b)$ , 级数  $\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sin \gamma y$  符合  $y = 0$  为支承边和  $y = b$  为自由边的变形特点, 且在区间  $[0, b]$  上具有正交性.

图 4 所示一对边支承一对边自由的矩形板<sup>[3]</sup>

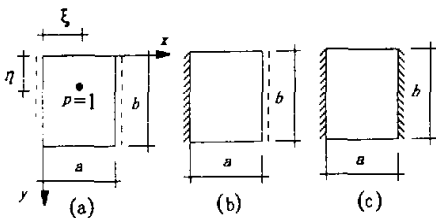


图 4 一对边支承一对边自由矩形板

$$w_1 = \sum_{m=1,2,3}^{\infty} (A_m \text{sh} \alpha y + B_m \text{ch} \alpha y + C_m \alpha y \text{sh} \alpha y + D_m \alpha y \text{ch} \alpha y) \sin \alpha x + E_0 x + F_0 + G_0 x^2 + H_0 x^3 + \sum_{n=1,2}^{\infty} (E_n \text{sh} \beta x + F_n \text{ch} \beta x + G_n \beta x \text{sh} \beta x + H_n \beta x \text{ch} \beta x) \cos \beta y, \quad (4)$$

式中:  $\alpha = m\pi/a$ ;  $\beta = n\pi/b$ ; 级数  $\sum_{n=0,1,2}^{\infty} \cos \beta y$  符合  $y$

$= 0$  和  $y = b$  为自由边的变形特点, 且在区间  $[0, b]$  上具有正交性. 为保证正交级数的完备性,  $n$  的取值必须从零开始, 并将  $n = 0$  时的双曲函数改为  $x$  的多项式.

2.2 弯曲特解  $w_2$  的选取

特解  $w_2$  采用双重三角级数, 且级数形式与通解中的相同. 当在点  $(\zeta, \eta)$  处作用单位集中力时, 有

对图 2 所示四边支承矩形板

$$w_2 = \frac{4}{abD} \sum_{m=1,2,3}^{\infty} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \frac{\sin \alpha \zeta \sin \beta \eta \sin \alpha x \sin \beta y}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad (5)$$

式中:  $D$  为板的弯曲刚度.

对图 3 所示三边支承一边自由矩形板

$$w_2 = \frac{4}{abD} \sum_{m=1,2,3}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \alpha \zeta \sin \gamma \eta \sin \alpha x \sin \gamma y}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}. \quad (6)$$

对图 4 所示一对边支承一对边自由矩形板

$$w_2 = \frac{2}{abD} \sum_{m=1,2,3}^{\infty} \frac{\sin \alpha \zeta \sin \alpha x}{\alpha^4} + \frac{4}{abD} \sum_{m=1,2,3}^{\infty} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\sin \alpha \zeta \cos \beta \eta \sin \alpha x \cos \beta y}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}. \quad (7)$$

利用矩形板四边的边界条件可导出求解待定系数  $A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$  的线性方程组, 解这些方程组就可以计算出矩形板在点  $(\zeta,$

$\eta$ )作用单位集中力时,任意点 $(x, y)$ 处的挠度值,根据功的互等定理,柔度阵必定是实对称阵。

### 3 计算方法及结果

假定多自由度体系的自由振动为简谐振动,可写成

$$w(t) = W \sin(\omega t + \theta) \quad (8)$$

式中: $W$ 表示板的振型; $\omega$ 为振动圆频率; $\theta$ 表示相位角。

将式(8)代入基于柔度阵的振动方程(1),有

$$DMW = \frac{1}{\omega^2} W \quad (9)$$

由式(9)可以看出,板的动力特性分析实质上

是一个特征问题的计算。在工程实际中,一般仅需要计算出前几个低阶频率及其相应的振型,比较有效的方法是子空间迭代法。通常的子空间迭代法是通过刚度方式求解,采用逆迭代法<sup>5,6</sup>,而通过式(9)采用柔度方式求解,必须采用正迭代法。本文编制了相应的子空间正迭代程序,并计算了前述15种边界条件的矩形板的前10个振动圆频率及其相应的振型。计算时,取 $a = b, \mu = 0.3$ ;划分网格时,取 $k_1 = 10, k_2 = 10$ 。其中前5个频率见表1、表2。频率的单位均为 $\sqrt{D}/(a^2 \sqrt{m}) \text{ rad/s}$ ,  $\bar{m}$ 为板单位面积的质量。图5为四边支承方板振型前5个振型的振型节线图(从左至右依次表示第1~5振型)。

表1 四边支承矩形板、三边支承一边自由方板自由振动频率

边界条件	振 动 频 率					边界条件	振 动 频 率				
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$		$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
图2(a)	19.74	49.33	49.33	78.89	98.57	图3(a)	11.70	27.91	41.27	59.31	62.53
	(19.74)*	(49.35)*	(49.35)*	(78.96)*	(98.70)*		(11.68)*	(27.76)*	(41.20)*	(59.07)*	(61.86)*
图2(b)	23.64	51.66	58.62	86.05	100.13	图3(b)	12.71	33.30	41.78	63.33	73.26
	(23.65)*	(51.67)*	(58.65)*	(86.13)*	(100.27)*		(12.89)*	(34.14)*	(41.57)*	(63.85)*	(73.95)*
图2(c)	27.05	60.51	60.75	92.72	114.34	图3(c)	16.82	31.29	51.49	64.70	67.81
	(27.15)	(60.83)	(61.06)	(93.88)	(115.06)		(16.77)	(30.96)	(51.27)	(63.16)	(67.46)
图2(d)	28.95	54.72	69.28	94.46	102.07	图3(d)	17.57	36.27	51.92	71.43	75.20
	(28.95)*	(54.73)*	(69.33)*	(94.59)*	(102.22)*		(17.51)	(35.78)	(51.68)	(70.96)	(73.17)
图2(e)	31.82	63.29	71.02	100.64	116.12	图3(e)	23.41	35.78	62.98	67.46	77.67
	(31.96)	(63.71)	(71.42)	(102.06)	(116.98)		(23.35)	(35.47)	(62.72)	(66.01)	(77.37)
图2(f)	35.98	73.33	73.33	108.01	131.23	图3(f)	23.98	40.28	63.34	77.61	80.94
	(36.15)	(73.83)	(73.83)	(109.69)	(132.27)		(23.89)	(39.81)	(63.06)	(75.65)	(80.55)

说明: \* 为理论值。

表2 一对边支承一对边自由方板自由振动频率

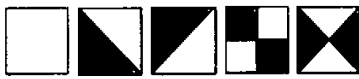
边界条件	振 动 频 率				
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
图4(a)	9.64	16.21	37.24	39.00	46.97
	(9.87)*	(16.13)*	(36.73)*	(39.48)*	(46.74)*
图4(b)	15.20	20.69	40.29	49.52	56.57
	(15.18)	(20.48)	(39.04)	(49.32)	(55.96)
图4(c)	22.18	26.53	44.17	61.28	67.57
	(22.15)	(26.31)	(42.97)	(61.00)	(66.84)

说明: \* 为理论值。

为比较起见,通过求解频率方程,计算出具有

一对边简支的矩形板自由振动的前5个频率(计算时取 $a = b, \mu = 0.3$ ),其他边界条件的方板采用有限元法计算,计算结果分别列于表1、表2括号内,与本文结果非常吻合。对于四边简支的方板(图2(a))、两邻边简支两邻边固支的方板(图2(c))、四边固定的方板(图2(f)),其2~5振型呈现出对 $x = y$ 轴具有对称性或反对称性,与其他方板的振型节线图形式不同,这是由于这3种方板的第2阶频率 $\omega_2$ 与第3阶频率 $\omega_3$ 相等,第5阶频率 $\omega_5$ 与第6阶频率 $\omega_6$ 相等,于是第2振型与第3振型同时出现而发生叠加,第5振型与第6振型同时出现而发生叠加的结果。对于 $a \neq b$ 的矩形板,其自由振动的频率各不相同,它们的各阶

振型不会存在这种节线图。



(a) 图 2(a)边界条件方板振型节线图



(b) 图 2(b)边界条件方板振型节线图



(c) 图 2(c)边界条件方板振型节线图



(d) 图 2(d)边界条件方板振型节线图



(e) 图 2(e)边界条件方板振型节线图



(f) 图 2(f)边界条件方板振型节线图

图 5 振型节线图

### 4 结 论

由以上分析可以看出,基于柔度阵建立矩形薄板自由振动运动方程的集中质量法,用于求解矩形板振动的各阶振动频率及其相应振型是切实可行的,具有很高的计算精度,本方法还可以推广到其他边界矩形板的动力分析。

### 参 考 文 献

[1] 唐国明. 矩形薄板弯曲在集中荷载作用下的统一求

解方法[D]. 郑州: 郑州工业大学, 1997.

[2] 许琪楼, 姜 锐, 龙晔君. 三边支承一边自由的矩形板弯曲[J]. 郑州工业大学学报, 1997, 18(3): 5-15.

[3] 姜 锐, 许琪楼. 一对边支承一对边自由的矩形板弯曲[J]. 郑州工业大学学报, 1998, 19(4): 46-50.

[4] 克拉夫 R W. 结构动力学[M]. 王光远译. 北京: 科学出版社, 1983.

[5] 巴特 K J. 有限元分析中的数值方法[M]. 林公像, 罗恩译. 北京: 科学出版社, 1991.

[6] 许琪楼. 空间杆系结构的子空间迭代动力分析和抗震计算[J]. 郑州工业大学学报, 1982, 3(2): 64-71.

## Lumped - mass Method in Dynamic Analysis of Rectangular Thin Plate

LIANG Yuan - sen<sup>1</sup>, XU Qi - lou<sup>1</sup>, LI Feng<sup>2</sup>, LI Ying - qing<sup>3</sup>

(1. College of Civil & Building Engineering, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Fourth Engineering Bureau for the Communication Construction of China, Zhengzhou 450052, China; 3. City Construction Committee of Zhengzhou, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** In this paper, the dynamic character of rectangular plate with four edges supported, three edges supported and one edge free, one opposite edges supported and other edges free are analyzed with the lumped - mass method and the corresponding program is designed with the method of subspace direct iteration. It can calculate all frequencies and their corresponding mode of vibration of the rectangular plate, and compared with the existing accurate solutions and the finite element method's solutions, their calculated values are quite coincident. This method will work on other rectangular plates' dynamic analysis.

**Key words:** lumped - mass method; dynamic analysis; rectangular plate