

文章编号:1007-6492(1999)01-0097-04

# 矢量格林函数计算静磁场 $B$ 和 $H$ 的方法探讨

李 翔, 方舒燕, 杨柳青

( 郑州电力高等专科学校电力系, 河南 郑州 450004)

**摘 要:** 为了提供对复杂磁场分析的新思路, 论文主要介绍将矢量格林函数与积分方程法结合起来, 对复杂磁场的基本参量  $B$  和  $H$  进行数值计算的方法, 并给出实际例子说明这种方法与有限元法相比所体现出的优越性.

**关键词:** 静磁场; 矢量格林函数; 积分方程法

**中图分类号:** TQ 225.241

**文献标识码:** A

## 0 引言

静磁场特性的主要表征参量为  $B$  和  $H$ , 针对静磁场中  $B$  和  $H$  的分析计算方法也很多, 但更多的是采取一些传统的数值计算方法, 如有限元法、边界元法等. 随着工程实际问题越来越复杂, 传统的数值计算方法要么计算精度不能满足工程要求, 要么干脆无能为力. 本文以静磁场的积分方程为例, 着重探讨矢量格林函数的数值计算问题.

## 1 矢量磁位方程的离散

基于矢量格林定理的第二恒等式, 以线性、恒定磁场为例, 首先讨论矢量格林函数的积分形式解.

在线性、恒定磁场中, 若以矢量磁位为待求量, 则旋度-旋度方程为<sup>[1]</sup>

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}, \quad (1)$$

经过一系列的推导论证, 可得到物质磁化后产生的矢量磁位  $A(\mathbf{r})$  为:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &= A(x, y, z) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dv \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left( -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) dv \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv \end{aligned} \quad (2)$$

式中,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|;$$

$$B(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} =$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dv, \quad (3)$$

由恒等式  $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$ , 并令  $\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{G} = \mathbf{R}/R^3$ , 则有

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[ \mathbf{M} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] &= \left[ \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] \mathbf{M} - (\nabla \cdot \mathbf{M}) \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \\ &\quad \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

在离散后, 认为小磁化单元中  $\mathbf{M}$  为常矢, 则可认为上式右边的第二项、第三项等于零. 亦即式(4)变为

$$\nabla \times \left[ \mathbf{M} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] = \mathbf{M} \left[ \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3}. \quad (5)$$

令

$$B_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv, \quad (6)$$

$$B_2(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv, \quad (7)$$

现分别讨论. 对  $B_1(\mathbf{r})$  分两种情况:

(1)  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \neq 0$  时, 利用恒等式  $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{R}$  得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) &= \mathbf{R} \cdot \nabla \left( \frac{1}{R^3} \right) + \frac{1}{R^3} \nabla \cdot \mathbf{R} \\ &= \frac{-3}{R^4} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} + \frac{1}{R^3} \cdot 3; \end{aligned}$$

(2)  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = 0$  时, 围绕  $\mathbf{r}'$  点作一半径为  $r_1$  的

收稿日期:1998-10-18; 修订日期:1998-12-26

作者简介:李 翔 (1963-), 男, 河南省新乡市人, 郑州电力高等专科学校讲师, 硕士, 主要从事电磁场计算和分析方面的研究.

小圆球,如图 1 所示,

则

$$\int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv = \oint_{S'} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^3} ds = \frac{1}{r_1^2} \oint_S ds = 4\pi,$$

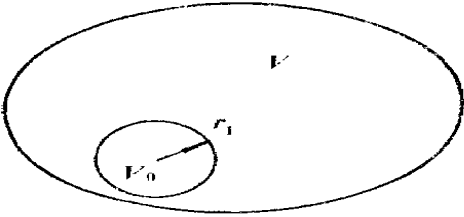


图 1 存在奇点的磁场区域

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_I(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv \\ &= \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases} \text{的积}$$
$$\int_{V'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}' \in V_0 \\ 0 & \mathbf{r}' \notin V_0 \end{cases}.$$

对  $\mathbf{B}_N(\mathbf{r})$  可推导如下

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} dv = \\ &= \mathbf{B}_N(\mathbf{r})_x \mathbf{i} + \mathbf{B}_N(\mathbf{r})_y \mathbf{j} + \mathbf{B}_N(\mathbf{r})_z \mathbf{k} \end{aligned} \tag{9}$$

注意到:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} &= \mathbf{i} \left[ (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{x-x'}{R^3} + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{j} \left[ (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{y-y'}{R^3} + \mathbf{k} \left[ (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{z-z'}{R^3} \right] \right] \right] = \\ &= \mathbf{i} \left[ \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{x-x'}{R^3} + \mathbf{j} \left[ \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{y-y'}{R^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathbf{k} \left[ \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{z-z'}{R^3} \right] \right] \right], \end{aligned} \tag{10}$$

上式推导中应用了如下关系:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} \cdot \nabla) A &= \mathbf{M} \cdot \nabla A \\ (\mathbf{M} \cdot \nabla) \varphi &= \mathbf{M} \cdot \nabla \varphi \end{aligned}$$

已有:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{x-x'}{R^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x-x'}{R^3} \right] \mathbf{i} + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{x-x'}{R^3} \right] \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{x-x'}{R^3} \right] \mathbf{k} = \\ &\quad \frac{R^2 - 3(x-x')^2}{R^5} \mathbf{i} - \\ &\quad \frac{3(x-x')(y-y')}{R^5} \mathbf{j} - \end{aligned}$$

$$\frac{3(x-x')(z-z')}{R^5} \mathbf{k},$$

同理:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{y-y'}{R^3} &= \frac{3(x-x')(y-y')}{R^5} \mathbf{i} - \\ &\quad \frac{R^2 - 3(y-y')^2}{R^5} \mathbf{j} - \frac{3(y-y')(z-z')}{R^5} \mathbf{k}; \\ \nabla \frac{z-z'}{R^3} &= \frac{3(x-x')(z-z')}{R^5} \mathbf{i} - \\ &\quad \frac{3(y-y')(z-z')}{R^5} \mathbf{j} + \frac{R^2 - 3(z-z')^2}{R^5} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

将上述三式代入式(10),得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N(\mathbf{r})_x &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left\{ \frac{R^2 - 3(x-x')^2}{R^5} M_x - \right. \\ &\quad \left. \frac{3(x-x')(y-y')}{R^5} M_y - \right. \\ &\quad \left. \frac{3(x-x')(z-z')}{R^5} M_z \right\} dv; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N(\mathbf{r})_y &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left\{ \frac{3(y-y')(x-x')}{R^5} M_x - \right. \\ &\quad \frac{R^2 - 3(y-y')^2}{R^5} M_y - \\ &\quad \left. \frac{3(y-y')(z-z')}{R^5} M_z \right\} dv; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N(\mathbf{r})_z &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left\{ \frac{3(z-z')(x-x')}{R^5} M_x - \right. \\ &\quad \frac{3(z-z')(y-y')}{R^5} M_y - \\ &\quad \left. \frac{R^2 - 3(z-z')^2}{R^5} M_z \right\} dv. \end{aligned} \tag{13}$$

对平行平面场,设  $M_z=0$ , 且  $B_z=0$ , 对以上诸式设  $z$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  积分, 则有:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N(\mathbf{r})_x &= \\ &\quad \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \iint_A \frac{(x-x')^2 - (y-y')^2}{R^4} M_x dx dy + \right. \\ &\quad \left. \iint_A \frac{2(x-x')(y-y')}{R^4} M_y dx dy \right]; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N(\mathbf{r})_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \iint_A \frac{2(x-x')(y-y')}{R^4} M_x dx dy - \right. \\ &\quad \left. \iint_A \frac{(y-y')^2 - (x-x')^2}{R^4} M_y dx dy \right] \end{aligned} \tag{15}$$

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{M}_x(\mathbf{r}') \mathbf{i} + \mathbf{M}_y(\mathbf{r}') \mathbf{j}] \cdot \cdot )$$

## 2 分析步骤

以上述公式为基础,积分方程法计算磁场的步骤可叙述如下:首先认为任何一点场是由电流源磁

场  $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$  与介质磁化后产生的磁场  $\mathbf{H}_i(\mathbf{r})$  迭加而成,即:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_i(\mathbf{r})$ ;其次,在已知电流大小与分布情况下,  $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$  可按式(16)求出:

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{R^3} dV \quad (16)$$

计算中,注意到介质在空间各点产生的磁场  $\mathbf{H}_i(\mathbf{r})$  与源点和场点间的距离、介质的磁化强度等有关.

下面以图2为例,予以说明.

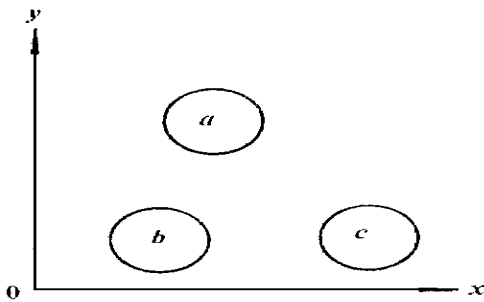


图2 不同介质的磁场区域

设区域中存在电流区  $c$ 、铁磁介质区  $a, b$ ,划分  $a, b$  时应考虑到  $\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_b$  的不同.  $\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_b$  在本单元中为常数.  $\mathbf{B}_I$  和  $\mathbf{B}_{IV}$  为

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

$$\mathbf{H}_I(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_N(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{R} - R^2 \mathbf{M}_d)}{R^5} dV, \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_N(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{R} - R^2 \mathbf{M}_d)}{R^5} dV, \quad (20)$$

式(19),(20)展开后即为式(11)~(13).

在式(19),(20)中,  $\mathbf{M}$  为  $\mathbf{H}$  的函数出现在积分号  $\int_{V'} \cdots dV$  中,故为积分方程.  $\mathbf{M}$  在单元内看成常数,则对于图示的场可列出方程如下:

$$\begin{cases} H_a = H_{ac} + [C_{aa}] M_a + [C_{ab}] M_b \\ H_b = H_{bc} + [C_{ba}] M_a + [C_{bb}] M_b \end{cases} \quad (21)$$

式中双下标注的前一位表示场,后一位表示源. 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{H} - \mathbf{H} \\ \mathbf{x} &= \left[ \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right] \mathbf{H} = \mathbf{X} \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (22)$$

将式(22)代入式(21),得

$$\begin{cases} H_a = H_{ac} + [C_{aa}] X_a H_a + [C_{ab}] X_b H_b \\ H_b = H_{bc} + [C_{ba}] X_a H_a + [C_{bb}] X_b H_b \end{cases} \quad (23)$$

或
$$\begin{cases} [C_{aa}] X_a - [I] \} H_a + [C_{ab}] X_b H_b = -H_{ac} \\ [C_{ba}] X_a H_a + [C_{bb}] X_b - [I] \} H_b = -H_{bc} \end{cases} \quad (24)$$

如果  $X_a, X_b$  已知,或给以假定值,式(23)即为  $H_{ax}, H_{ay}, H_{az}, H_{bx}, H_{by}, H_{bz}$  6个未知量的线性方程组.

在计算实际问题时,由于  $\mu$  的非线性,采用如图3所示的步骤<sup>[3]</sup>:

- (1) 先假设  $X_a, X_b$  初值,形成系数阵;

(2) 由电流场构成方程右端项;

(3) 解方程组,求出  $H_a, H_b$ ;

(4) 查磁化曲线,核对  $X_a$  和  $X_b$ ;

(5) 循环到  $X_a, X_b$  的误差在允许值之内.

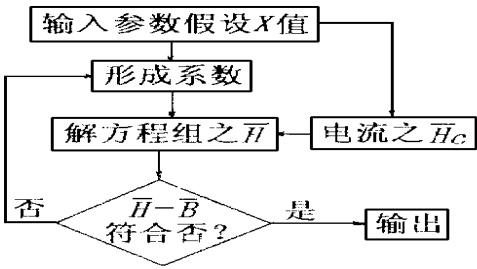


图3 计算步骤流程图

3 实际示例

现以图4中的C形磁铁的磁场数值计算为例<sup>[3]</sup>,来说明积分方程法(IEM)的应用.(由于论文篇幅所限,详细过程不再给出).

图4中画出C形磁铁的上半部分.将磁铁剖分为69个元素.

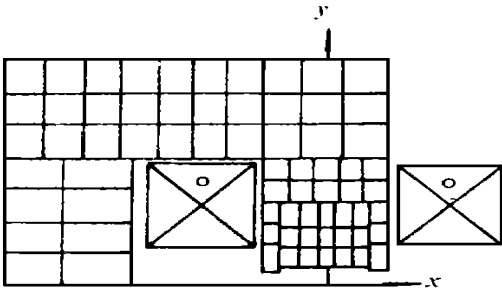


图4 C型磁铁

经VAX-11/780计算,迭代4次,CPU为3.8 min,得到如图5所示的结果.

图5中“•”点为积分方程法的计算结果,实线为有限元法(FEM)的计算结果.

空气隙中平均磁感应强度  $B_{0FE}$  为5019.4高斯,  $B_{0FE}$  为5005.4高斯,两者相差仅为:

$$\frac{\Delta B_0}{B_{0FE}} \times 100\% = \frac{5005.4 - 5019.4}{5019.4} \times 100\% = -0.28\%$$

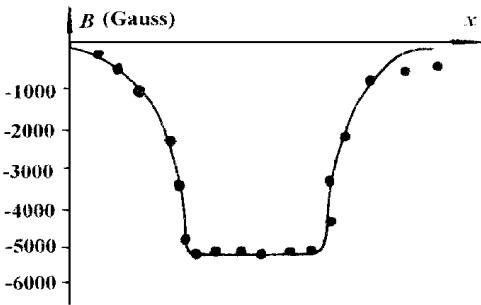


图 5 C 型磁铁的 B 曲线

由计算结果可看出,用积分方程法与有限元法来计算同一磁场问题所产生的误差很小.但在实际计算过程中,无论从分析方法还是计算量等方面相比较,积分方程法要比有限元法处理问题简单些.这是因为通过矢量格林函数(单位源所产生的场)建立积分方程较简单,而且积分方程法是离散区域的计算.而对于有限元法,首先应对所求区域的各点离散化,然后再逐点计算,这本身决定

了该方法的复杂化.

4 结束语

矢量格林函数与积分方程法结合起来,是解决电磁场问题的一种十分有效的方法.但是由于实际中电磁场问题的多样性、复杂性,所以具体到某一实际问题还应具体分析.天下既然没有包治百病的灵丹妙药,也无统一完美的方法求解各种电磁场问题,格林函数法也是如此.随着计算机技术和数值计算方法的发展,格林函数在求解电磁场问题中日趋重要.此外,格林函数在其它学科中也有较为广泛的应用.

参考文献

[ 1 ] 冯慈璋.静态电磁场[ M ].西安:西安交通大学出版社,1985.20—24.  
[ 2 ] 邵汉光.电磁理论中的格林函数与并矢格林函数[ M ].保定:华北电力大学出版社,1992.15—20.  
[ 3 ] 张 涵.电磁场数值计算[ M ].北京:中国科技出版社,1989.40—42.

Computation of  $\vec{B}$  and  $\vec{H}$  in Static Magnetic Field with Vector Green's Function

LI Xiang , FANG Shu -yan , YANG Liu -qing

( Department of Electrical Engineering ,Zhengzhou Electric Power College ,Zhengzhou 450004,China)

**Abstract** :This paper discusses the computation of  $\vec{B}$  and  $\vec{H}$ , which are two important parameters in Static Magnetic Field .Compared with the limited element method the computation proposed in this paper shows its superiority .

**Key words** static field ; vector Green's function ; integral equation method

河南省道路检测工程技术研究中心

以郑州工业大学为依托单位的河南省道路检测工程技术研究中心,是经河南省科委批准组建的首批六个工程中心之一,主要从事公路、城市道路及机场道面无损检测技术的研究开发与推广应用.中心以一批年轻博士为主体,形成了跨道路工程、检测技术及计算机应用等学科的研究开发队伍,经过几年的艰苦创业,在基础研究、技术开发、成果推广及人员培训等方面均做出了突出成绩,在国内已具有较大的影响.

该工程中心将国际上路面检测评价技术的发展与我国公路建设的实际需要密切结合,重点研究落锤式弯沉仪(FWD)、激光断面仪(RSP)及探地雷达(GPR)等高科技路面检测系统的关键技术,开发配套的数据分析软件和路面评价软件.近年来,中心承担完成“八五”国家重点科技攻关、国家自然科学基金、河南省重点攻关及交通部重点项目等十余项课题.于1997年获河南省科技进步一等奖,1998获国家科技进步三等奖.