1999年 3 月 郑州工业大学学报 Mar. 1999
第20卷 第1期 Journal of Zhengzhou University of Technology Vol.20 No.1

文章编号: 1007-6492(1999)02-0064-02

类等价无穷小替换定理的推广

成立社

(郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002)

摘　要: 把文献[1]中类等价无穷小替换定理推广到幂指函数型的不定式中,获得了比文献[1]应用更广泛的几个结果,从而使得类等价替换定理应用更加灵活方便.

关键词: 幂指函数; 不定式; 类等价无穷小; 替换

中图分类号: O 173　　　**文献标识码:** A

0　引言

文献[1]研究了在"$\frac{0}{0}$"型不定式中,分子可用类等价无穷小,分母可用等价无穷小去替换.对幂指函数型不定式求极限时,一般不能直接用等价替换,虽目前有些文献论证过对某些幂指函数的不定式也可用等价无穷小去替换,如文献[2].但这些替换仅局限在等价无穷小中,即第一类无穷小内,而不能是类等价无穷小.本文论证了在某些条件下,幂指函数型的不定式求极限时,也可直接用类等价无穷小去替换,使类等价替换定理应用更加广泛.为论证叙述方便,文中的无穷小均以 $x \to x_0$ 为过程进行论证,对于其它极限过程的证明类似.

1　定义与引理[3,4]

1.1　几个定义

定义1　设 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小,如果 $\alpha(x)$ 在 x_0 的任何去心邻域内均有零值点,则称 $\alpha(x)$ 为第二类无穷小.否则为第一类无穷小.

定义2　设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 均为 $x \to x_0$ 时的第一类无穷小,若 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小,记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

定义3　设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 均为 $x \to x_0$ 时的第二类无穷小,若在 x_0 的某去心邻域内均有相同的零值点,而除零值点外 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是类等价无穷小,记作 $\alpha(x) \simeq \beta(x)$.

1.2　几个引理

引理1　设 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x)$ 为第二类无穷小,则 $\ln[1+\alpha(x)]$ 也是第二类无穷小且有

$$\ln[1+\alpha(x)] \simeq \alpha(x).$$

证明　因为 $\alpha(x)$ 是第二类无穷小,所以由第二类无穷小的定义知 $\ln[1+\alpha(x)]$ 必是第二类无穷小.记 $U(\hat{x}_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$; $N = \{x \mid \alpha(x) = 0\}$; $M = \{x \mid \ln[1+\alpha(x)] = 0\}$.以下仅证 $\alpha(x) \simeq \ln[1+\alpha(x)]$.

(1) $\forall x \in N \cap U(\hat{x}_0, \delta)$,因为 $\alpha(x) = 0$,所以 $\ln[1+\alpha(x)] = 0$,故 $x \in M \cap U(\hat{x}_0, \delta)$,即 $N \cap U(\hat{x}_0, \delta) \subset M \cap U(\hat{x}_0, \delta)$.

$\forall x \in M \cap U(\hat{x}_0, \delta)$,因为 $\ln[1+\alpha(x)] = 0$,所以 $1+\alpha(x) = 1$,即 $\alpha(x) = 0$,所以 $x \in N \cap U(\hat{x}_0, \delta)$,故有 $M \cap U(\hat{x}_0, \delta) \subset N \cap U(\hat{x}_0, \delta)$.综上可知,$M \cap U(\hat{x}_0, \delta) = N \cap U(\hat{x}_0, \delta)$.

(2) $\forall x_n \in U(\hat{x}_0, \delta) - N \cap U(\hat{x}_0, \delta)$,且当 $n \to \infty$ 时,$x_n \to x_0$.因 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$,故有 $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha(x_n) = 0$,且 $\alpha(x_n) \neq 0$.由等价无穷小替换定理有 $\ln[1+\alpha(x_n)] \sim \alpha(x_n)$,(当 $n \to \infty$ 时)结合海因极限定理有,当 $x \to x_0$ 时 $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$,其中 $x \in U(\hat{x}_0, \delta) - N$.

综合(1),(2),由类等价无穷小定义知 $\ln[1+\alpha(x)] \simeq \alpha(x)$.

引理2　设 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x) \simeq \beta(x)$,则有 $\ln[1+\alpha(x)] \simeq \ln[1+\beta(x)]$.

由引理1及类等价无穷小定义易证,不再叙述.

引理3　设 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x) \simeq \beta(x)$,而 $f(x)$ 为是任意函数,则有

(1) 当 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) f(x)$ 存在时,$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) f(x)$

收稿日期: 1998-09-21; **修订日期:** 1998-11-12

作者简介: 成立社(1963-),男,陕西省武功县人,郑州工业大学讲师,主要从事函数论方面的研究.

$=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)f(x)=0$；

(2) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)$ 也不存在且也不是∞.

证明　(1)的证明与文献[1]中定理3的证明方法类似，可参见文献[1]，下面仅证(2)部分.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)$ 存在，因 $\alpha(x)\simeq\beta(x)$，由(1)知 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)f(x)=0$，这与题设矛盾，故 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)$ 也不存在且不是无穷大.

2　几个结果

定理1　设 $x\to x_0$ 时，$\beta(x)\sim\beta'(x)$；$\alpha(x)\simeq\alpha'(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim_{x\to x_0}[1+\alpha'(x)]^{\frac{1}{\beta'(x)}}.$$

证明　因 $\alpha(x)\simeq\alpha'(x)$，由引理2有 $\ln[1+\alpha(x)]\simeq\ln[1+\alpha'(x)]$，再结合文献[1]中定理3，有

$$\lim_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim_{x\to x_0}\exp\left(\frac{\ln[1+\alpha(x)]}{\beta(x)}\right)=\exp\left(\lim_{x\to x_0}\frac{\ln[1+\alpha(x)]}{\beta(x)}\right)=\exp\left(\lim_{x\to x_0}\frac{\ln[1+\alpha'(x)]}{\beta'(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\exp\left(\frac{\ln[1+\alpha'(x)]}{\beta'(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}[1+\alpha'(x)]^{\frac{1}{\beta'(x)}}.$$

由定理1与引理3有如下推论

推论　设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\simeq\alpha'(x)$，而 $f(x)$ 为任意一个函数，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{f(x)}$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\alpha'(x)]^{f(x)}$ 的存在性相同，且二者相等.

即 $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}[1+\alpha'(x)]^{f(x)}$.

定理2　设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$；$\beta(x)\simeq\beta'(x)$.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'(x)^{\beta'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'(x)^{\beta'(x)}=1$.

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'(x)^{\beta'(x)}$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)}$ 也不存在.

证明　(1) 因 $\beta'(x)$ 为第二类无穷小，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'(x)^{\beta'(x)}$ 存在，则易知 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'(x)^{\beta'(x)}=1$. 再结合引理3有

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\exp[\beta(x)\ln\alpha(x)]=\exp\left(\lim_{x\to x_0}[\beta(x)\ln\alpha(x)]\right)=$$
$$\exp\left(\lim_{x\to x_0}\left[\beta'(x)\ln\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}\cdot\alpha'(x)\right)\right]\right)=\exp\left(\lim_{x\to x_0}\left[\beta'(x)\ln\frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}+\beta'(x)\ln\alpha'(x)\right]\right)=$$
$$\exp\left[\lim_{x\to x_0}\beta'(x)\ln\alpha'(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\alpha'(x)^{\beta'(x)}=1.$$

(2) 假设结论不真，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)}$ 存在，由(1)知 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'(x)^{\beta'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)}=1$，这与题设矛盾，故 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)}$ 不存在.

推论　设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\simeq\alpha'(x)$，而 $f(x)$ 是一个正值函数，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\alpha(x)}$ 与极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\alpha'(x)}$ 存在性与不存在性相同；且在存在时二者相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\alpha'(x)}$.

由引理3即可得到该推论的证明.

参考文献

[1] 成立社. 等价无穷小替换定理的一点注记[J]. 郑州工业大学学报，1998，19(2)：123－126.

[2] 朱杏娟，范锦芳. 一组未定型的定值命题[J]. 工科数学，1990，6(4)：93－98.

[3] 吉林大学数学系. 数学分析(中册)[M]. 北京：人民教育出版社，1978.

[4] 山其骞. 关于无穷小量的一个命题及其应用[J]. 工科数学，1995，11(2)：266－268.

Generalized Theorem of Class Equivalent Infinitesimal Replacement

CHENG Li－she

(Department of Mathematics, Physics and Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: This paper generalizes the theorem of class equivalent infinitesimal replacement in reference [1] to the indefinite form of power exponent function type, and obtains several results with more application than reference [1], thus leading to more flexible and convenient application of class equivalent infinitesimal replacement.

Key words: power exponent function; indefinite form; class equivalent infinitesimal; replacement