第19卷　第4期　　郑州工业大学学报　　Vol.19　No.4
1998年　12　月　Journal of Zhengzhou University of Technology　Dec.　1998

基尔霍夫衍射积分公式中虚系数的解释

关智武
(郑州工业大学数理力学系)

摘　要　基尔霍夫通过严格的数学理论推导出了衍射积分公式，本文以简化的方法验证了公式中的虚系数，并给予直观物理解释。

关键词　波前；次波；衍射
中图分类号　O 436.1

1816年，法国的菲涅耳在惠更斯原理中的“次波”概念的基础上，引入“次波相干叠加”的思想，较为成功地解释了光的衍射现象，形成了后人所谓的惠更斯一菲涅耳原理：波前上的每一点都可看作为一个新的球面波的次波源，波场中的任意点(场点)的光扰动是所有次波到达该点的次级扰动的叠加。惠更斯一菲涅耳原理的数学表示式为：

$$U(P)=K\iint_{\Sigma}U_0(Q)\frac{e^{jkr}}{r}f(\theta,\theta_0)\mathrm{d}\Sigma \tag{1}$$

该式又称为菲涅耳衍射积分公式，式中所用符号参见图1。$U_0(Q)\frac{e^{jkr}}{r}$表示波前Σ上某次波源Q发出的复振幅为$U_0(Q)$的球面次波，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$，$\mathrm{d}\Sigma$为积分面元，图1中的$\vec{n}$为面元$\mathrm{d}\Sigma$的法线，$f(\theta,\theta_0)$为倾斜因子，菲涅耳设想$\theta=\theta_0=0$时，$f(\theta,\theta_0)$最大(可取作1)。

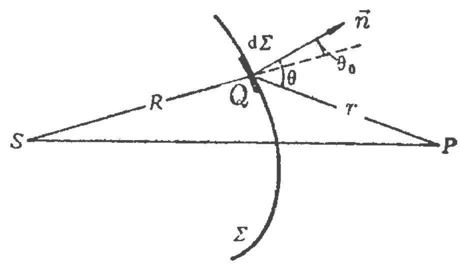

图1　基尔霍夫公式说明

1882年，德国的基尔霍夫利用严格的数学理论(亥姆霍兹方程、格林公式)，得出了如下基尔霍夫衍射积分公式：

$$U(P)=\frac{1}{j\lambda}\iint_{\Sigma}U_0(Q)\frac{e^{jkr}}{r}\left(\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\right)\mathrm{d}\Sigma \tag{2}$$

将菲涅耳衍射积分与基尔霍夫衍射积分相比较，发现两点明显区别，其一，后者将前者的倾斜因子具体化；其二，前者的比例系数K在后者中变为$\frac{1}{j\lambda}$。比例系数为虚数是个难以理解的问题，下面我们通过一个熟知的物理事实，验证菲涅耳衍射公式中的K就等于$\frac{1}{j\lambda}$，并给以直观物理解释。

1　验证 $K=\frac{1}{j\lambda}$

如图2所示，点光源S，取波前Σ为以S为球心、半径为R的球面。显然，由点光源S

收稿日期：1998－04－19
第一作者　男　1941年4月生　大学本科　副教授

发出的球面波传播距离(R+b)时在场点 P 引起的复振幅应为

$$U(P)=\frac{A_1}{R+b}e^{jk(R+b)} \tag{3}$$

现在用菲涅耳衍射积分公式求 $U(P)$

$$U(P)=K\iint_{\Sigma}U_0(Q)\frac{e^{jkr}}{r}f(\theta,\theta_0)\mathrm{d}\Sigma \tag{4}$$

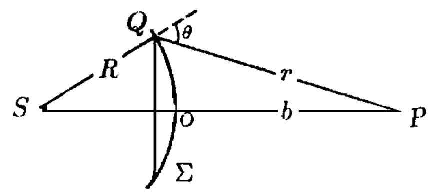

图 2　菲涅耳衍射

其中 $U_0(Q)$是波前 Σ 上 Q 点发出的次波的复振幅，$U_0(Q)=\frac{A_1}{R}e^{jkR}$。欲对整个波前(球面 Σ)积分从而求出 $U(P)$并不是件容易的事。用菲涅耳波带法可以解决积分的困难，由波带法得出的结论是：球面 Σ 上所有次波对场点 P 的复振幅的总贡献等于第一个波带 $\Delta\Sigma_1$ 对 P 点贡献的一半[1]，因此

$$U(P)=\frac{1}{2}K\iint_{\Delta\Sigma_1}U_0(Q)\frac{e^{jkr}}{r}f(\theta,\theta_0)\mathrm{d}\Sigma$$

对于第一个波带 $\Delta\Sigma_1$，$f(\theta,\theta_0)=1$，由球帽的微分关系可以得到 $\mathrm{d}\Sigma=\frac{2\pi Rrdr}{R+b}$[2]，积分上、下限为 b 和 $b+\frac{\lambda}{2}$，因而

$$U(P)=\frac{1}{2}\frac{2\pi A_1K}{2(R+b)}e^{jkR}\int_b^{b+\frac{\lambda}{2}}e^{jkr}\mathrm{d}r=-\frac{K\lambda}{j}\frac{A_1}{R+b}e^{jk(R+b)} \tag{5}$$

式(3)与式(5)应相等，故$-\frac{k\lambda}{j}=1$，即 $K=\frac{1}{j\lambda}$。

2　$K=\frac{1}{j\lambda}$的直观物理解释——等效次波

将基尔霍夫衍射公式中的$\frac{1}{j\lambda}$放进积分号内，并注意到$\frac{1}{j}=e^{-j\frac{\pi}{2}}$则有：

$$U(P)=\iint_{\Sigma}\frac{U_0(Q)}{\lambda}\frac{e^{j\left(kr-\frac{\pi}{2}\right)}}{r}\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\mathrm{d}\Sigma \tag{6}$$

式(6)中的$\frac{U_0(Q)}{\lambda}\frac{e^{j\left(kr-\frac{\pi}{2}\right)}}{r}$可以理解为由 Q 点发出的等效次波，它与 Q 点真实点光源发出的次波有两点明显区别：首先它的复振幅是真实点光源次波复振幅的$\frac{1}{\lambda}$；其次，它比真实点光源次波的相位超前$\frac{\pi}{2}$(已约定指数上的正相位表示落后，负相位表示超前)。等效次波的这些奇特性质从历史角度来看是很重要的，因为在菲涅耳的早期工作中，只有当我们能够使次级具有这些性质之后，才能通过惠更斯包络作图法和子波干涉原理的结合来准确预言衍射条纹。基尔霍夫的严格数学推导表明，这些性质是光的波动本性的结果。

另一方面，惠更斯－菲耳原理中的“次波”是处理衍射问题时提出的一种假设，为了使这种假设更符合实际情况，应在合理的范围内不断修改假设，而使次波具有真实光源不具备的某些性质，这是完全允许的。

(下转 116 页)

3.5 报表文件

(1)文档报表;

(2)工程图报表。

系统集成了两个工具,一个是文档编辑器 *EDIT*,一个是 *AUTO CAD*。

参考文献

1 刘 琼 · Foxpro 应用程序中建立图形的简易方法·软件世界,1995,26(2):10~12

2 Charle S Siegel·Foxpro 从入门到精通·刘京志译·北京:电子工业出版社,1992. 145~150

Management of Engineering Drawings

Yan Qiao Dong Mingliang Yang Yaomin

(*Zhengzhou University of Technology*)

Abstract Management of engineering drawings is an important part of CAD engineering application·A practical system of managing engineering drawings is introduced in this paper·

Keywords engineering drawings;management of drawings;CAD

(上接 113 页)

参考文献

1 玻恩 M,沃尔夫 E· 光学原理 · 黄乐天译 · 北京:科学出版社,1978.488

2 赵凯华,钟锡华 · 光学 · 北京:北京大学出版社,1982.198

An Explanation for the Imaginary Parameter of Kirchhoff's Diffraction Formula

Guan Zhiwu

(*Zhengzhou University of Technology*)

Abstract By the strict mathematics theory,Kirchhoff deduced his diffraction formula·This paper supports the imaginary parameter in a simplified way,and offers an intuitive explanation for it·

Keywords wave front; wavelet;diffraction