

一对边支承另一对边自由的矩形板弯曲<sup>\*</sup>

姜 锐 许琪楼 李 芳  
(郑州工业大学土木建筑工程学院)

**摘 要** 采用一种统一求解方法,求解出一对边支承,另一对边自由的矩形板在板面均布荷载、三角形分布荷载、板边局部或集中荷载作用下的弯曲解。计算表明这种解法收敛快,计算精度高。

**关键词** 弹性薄板弯曲;边界条件;统一解法

**中图分类号** TU 311.4

图 1 所示边长为  $a, b$  的 3 种矩形板,一对边支承(简支或固定),另一对边自由,李维解决了一对边简支的矩形板弯曲;另两种板可在李维解基础上采用叠加法求解<sup>[1]</sup>,但它只能解决板面分布荷载作用下的弯曲。本文采用一种统一解法,可以解决这 3 种板在板面分布荷载、板边局部或集中荷载作用下的弯曲。

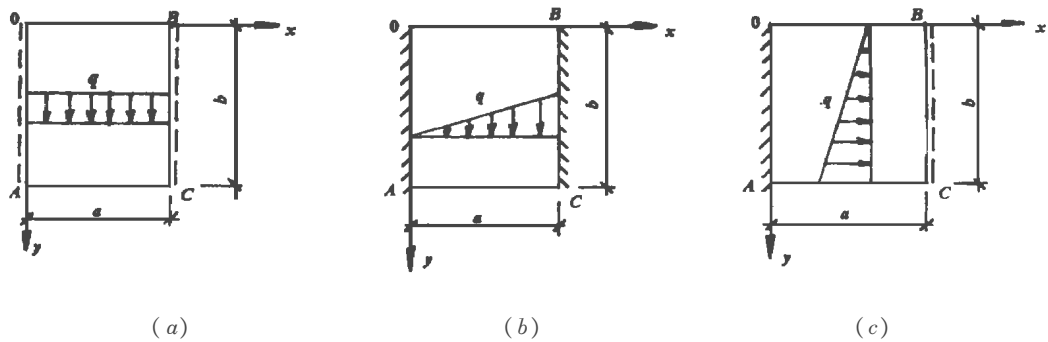


图 1 边长为  $a, b$  的 3 种矩形板

1 板面分布荷载作用下的弯曲

在板面分布荷载作用下,挠度  $W$  应满足下列平衡微分方程:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \tag{1}$$

式中  $D$  为板抗弯刚度,  $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ ,  $E, \mu$  分别为板的弹性模量及泊松比,  $t$  为板厚;  
 $q(x, y)$  为板面法向荷载。

设  $W = W_1 + W_2$  (2)

$W_1$  为方程(1)对应的齐次微分方程通解,  $W_2$  为方程(1)的一个特解,为表示板的双向

<sup>\*</sup> 河南省自然科学基金资助项目  
收稿日期:1997-11-11  
第一作者 女 1973 年 6 月生 硕士学位 助教  
(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

弯曲变形,  $W_1$  取包含 8 个待定常数的双向单三角级数:

$$\begin{aligned} W_1 = & \sum_{m=1,2,3}^{\infty} (A_m \operatorname{sh} \lambda y + B_m \operatorname{ch} \lambda y + C_m \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + D_m \lambda y \operatorname{ch} \lambda y) \sin \lambda x + \\ & (E_0 x + F_0 + G_0 x^2 + H_0 x^3 + \\ & \sum_{n=1,2,3}^{\infty} (E_n \operatorname{sh} \gamma x + F_n \operatorname{ch} \gamma x + G_n \gamma x \operatorname{sh} \gamma x + H_n \gamma x \operatorname{ch} \gamma x) \cos \gamma y \end{aligned} \tag{3}$$

式中  $\lambda = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\gamma = \frac{n\pi}{b}$ 。  $W_1$  表达式中采用了两个级数  $\sum_{m=1,2,3}^{\infty} \sin \lambda x$  和  $\sum_{n=0,1,2}^{\infty} \cos \gamma y$ 。级数  $\sum_{m=1,2,3}^{\infty} \sin \lambda x$  在  $x=0$  和  $x=a$  时其值为零,符合  $x=0$  和  $x=a$  边为支承边,挠度为零的变形特点;同样,级数  $\sum_{n=0,1,2}^{\infty} \cos \gamma y$  符合  $y=0$  和  $y=b$  边为自由边,挠度不为零的变形特点,且它必须从零开始,因为在  $[0, b]$  区间上  $\sum_{n=0,1,2}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} y$  是一个完整的正交三角函数族。当  $n=0$  时,  $\cos \frac{n\pi}{b} y=1$ , 但  $\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x, \frac{n\pi}{b} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x, \frac{n\pi}{b} x \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x$  均为零值。为保证待定常数的完整性,将  $n=0$  时对应的双曲函数改为  $x$  的多项式,即  $E_0, F_0, G_0, H_0$  是  $n=0$  时的  $E_n, F_n, G_n, H_n$ 。级数  $\sum_{m=1,2,3}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x$  在  $[0, a]$  区间上有下列正交性,当  $i, j$  为任意正整数时,有:

$$\int_0^a \sin \frac{i\pi x}{a} \cdot \sin \frac{j\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ a/2 & (i = j) \end{cases} \quad ex \tag{4}$$

级数  $\sum_{n=0,1,2}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} y$  在  $[0, b]$  区间上有下列正交性,当  $i, j$  为任意正整数(包括零)时,有:

$$\int_0^b \cos \frac{i\pi y}{b} \cos \frac{j\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ b & (i = j = 0) \\ b/2 & (i = j \neq 0) \end{cases} \tag{5}$$

为确保计算精度和数值收敛,  $W_2$  须满足一定的边界条件。在  $x=0$  和  $x=a$  边界上级数  $\sum_{m=1,2,3}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x$  的零阶导数和二阶导数值均为零,要求  $W_2$  在  $x=0$  和  $x=a$  边界上满足  $x$  的零阶导数对应的挠度条件(优先满足低阶导数条件);同样,在  $y=0$  和  $y=b$  边界上,级数  $\sum_{n=0,1,2}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} y$  的一阶导数和三阶导数值为零,要求  $W_2$  在  $y=0$  和  $y=b$  边界上满足相应的三阶导数对应的剪力条件(不存在一阶导数对应的斜率条件)。则  $W_2$  在边界上应满足下列条件:

$$= \left. \begin{aligned} x = 0, \quad W_2 &= 0 \\ x = a, \quad W_2 &= 0 \\ y = 0, \quad V_y &= 0 \\ y = b, \quad V_y &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

板面作用均布荷载  $q$  时,取

$$W_2 = \frac{q(x^4 - 2ax^3 + a^3x)}{24D} \tag{7}$$

板面作用图 1(b)所示  $x$  方向的三角形荷载时,取

$$W_2 = \frac{q(x^5 - a^2 x^3)}{120 a D}$$

(8)

板面作用图 1(c)所示  $y$  方向的三角形荷载时,取

$$W_2 = \frac{\left[ (y^3 - \frac{3}{2} b y^2)(x^2 - a x) - \frac{1}{2(2-\mu)}(x^4 - 2 a x^3 + a^3 x) + \frac{b}{2}(x^4 - a x^3) \right]}{\gamma 12 b (3 - 2 \mu)}$$

(9)

其它边界条件对应的方程右端项见表 1。

表 1 其它边界条件对应的方程右端项

边界条件	方 程 右 端 项		
	均布荷载	$x$ 向三角形荷载	$y$ 向三角形荷载
$x=0$ 时, $\frac{\partial w}{\partial x}=0$	$-\frac{a^3 C_{n0}}{24}$	0	$-h_1[-a(C_{n3}-3bC_{n2}/2)-a^3 C_{n1}/2/(2-\mu)]$
$x=a$ 时, $\frac{\partial w}{\partial x}=0$	$a^3 C_{n0}/24$	$-a^3 C_{n0}/60$	$-h_1[a(C_{n3}-3bC_{n2}/2)+a^3 C_{n1}/2/(2-\mu)+a^3 bC_{n0}/2]$
$x=0$ 时, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$	0	0	$-h_1(2C_{n3}-3bC_{n2})$
$x=a$ 时, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$	0	$-\frac{7a^2 C_{n0}}{60}$	$-h_1(2C_{n3}-3bC_{n2}+3a^2 bC_{n0})$
$y=0$ 时, $M_y=0$	$-\frac{\mu(12e_2-12ae_1)}{24}$	$-\frac{(20e_3-6a^2e_1)}{120a}$	$-h_1[-3b(e_2-ae_1)+b\mu(6e_2-3ae_1)]$
$y=b$ 时, $M_y=0$	$-\frac{(12e_2-12ae_1)\mu}{24}$	$-\frac{(20e_3-6a^2e_1)}{120a}$	$-h_1[3b(e_2-ae_1)+b\mu(6e_2-3ae_1)-b^3\mu e_0-6b\mu(e_2-ae_1)/(2-\mu)]$

注:表 1 中  $h_1=\frac{2-\mu}{12b(3-2\mu)}$ ,  $e_0, e_1, e_2, e_3$  分别为  $x^0, x^1, x^2, x^3$  在  $[0, a]$  区间上对  $\sum_{m=1,2,3} \sin \lambda x$  的展开系数,  $C_{n0}, C_{n1}, C_{n2}, C_{n3}$ , 分别为  $y^0, y^1, y^2, y^3$ , 在  $[0, b]$  区间上对  $\sum_{n=0,1,2} \cos \gamma y$  的展开系数, 其值见文献 [2]。

2 边界局部或集中荷载作用下板的弯曲

图 1 所示矩形板, 在边界局部或集中荷载作用下, 挠度  $W$  应满足式(1)对应的齐次微分方程, 即利用通解  $W_1$  即可求解。  $W_1$  表达式中的 8 个待定常数由板四边的边界条件确定。

求解时, 先将局部或集中荷载在其作用边上展成级数形式, 所用级数形式与通解  $W_1$  中该边对应级数形式相同<sup>[2]</sup>。 显然, 在边界荷载作用下, 求解待定常数的线性方程左端系数项不变, 右端项要作相应改变, 见表 2 所示。

算例: 图 1 所示 3 种矩形板, 设  $a=b$ , 泊松比  $\mu=0.3$ ,  $y=b$  边作用局部或集中荷载, 表 3~表 4 列出相对图 2 中各点的挠度系数与弯矩系

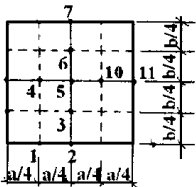


图 2 承受板面分布荷载的正方形板

数。

表 2  板上作用边界荷载时,方程右端项

板的类型	边界条件	方  程  右  端  项	
		$y=b$ 边上作用以 $x=x_0$ 为中心长度为 $l$ 的向下局部剪力 $q$	$y=b$ 边上 $x=x_0$ 处作用 的向下集中力 $P$
图 1 (a),(b), (c)	$x=0$ 时, $W_1=0$		
	$x=a$ 时, $W_1=0$		
	$y=0$ 时, $M_y=0$	0	0
	$y=b$ 时, $M_y=0$		
	$y=0$ 时, $V_y=0$		
图 1(b),(c)	$x=0$ 时, $\frac{\partial w_1}{\partial x}=0$	0	0
图 1(b)	$x=a$ 时, $\frac{\partial w_1}{\partial x}=0$	0	0
图 1(a)	$x=0$ 时, $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=0$	0	0
图 1(a),(b)	$x=a$ 时, $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=0$	0	0
图 1 (a),(b),(c)	$y=b$ 时		
	$-D\left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=b}$	$-\frac{4q}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{a}x_0\sin\frac{m\pi}{2a}l$	$+\mu-\frac{2P}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x_0$

表 3   $y=b$  边上作用以  $x=a/2$  为中心,长度为  $a/2$  的局部荷载时,  
各点的挠度系数与弯矩系数(表中级数取前 5 项)

计算点	类型	图 1(a)		图 1(b)		图 1(c)	
		本文值	有限元值	本文值	有限元值	本文值	有限元值
1	$W$	0.01780	0.01799	0.00559	0.00566	0.00726	0.00736
	$M_x$	0.15020	0.14872	0.03083	0.03112	0.01208	0.01389
2	$W$	0.02571	0.02601	0.01012	0.01028	0.01475	0.01496
	$M_x$	0.24460	0.24472	0.14800	0.15041	0.17500	0.17655
3	$W$	0.01507	0.01516	0.00394	0.00396	0.00700	0.00705
4	$W$	0.00616	0.00617	0.00055	0.00054	0.00123	0.00122
5	$W$	0.00873	0.00874	0.00109	0.00109	0.00289	0.00289
5	$M_x$	0.07275	0.07297	0.01250	0.01255	0.02689	0.02702
6	$W$	0.00531	0.00530	0.00011	0.00011	0.00104	0.00103
7	$W$	0.00365	0.00361	-0.00024	-0.00024	0.00016	0.00014
8	$M_x$	0.00000	0.00013	-0.09755	-0.09701	-0.14710	-0.14596
	$M_y$	0.00000	0.00012	-0.02926	-0.02809	-0.04414	-0.04277
9	$M_x$	0.00000	0.00017	-0.02475	-0.01998	-0.05272	-0.04814

表 4  $y=b$  边上  $x=a/2$  处作用集中荷载时,各点的挠度系数与弯矩系数(级数取前 5 项)

计算点	类型	图 1(a)		图 1(b)		图 1(c)	
		本文值	有限元值	本文值	有限元值	本文值	有限元值
1	$W$	0.03819	0.03870	0.01176	0.01218	0.01537	0.01584
	$M_x$	0.16980	0.21995	-0.08874	-0.03380	-0.12920	-0.07079
2	$W$	0.05904	0.06024	0.02524	0.02636	0.03525	0.03641
	$M_x$	0.77520	0.98390	0.56500	0.77900	0.62370	0.83581
3	$W$	0.03375	0.03395	0.00950	0.00966	0.01616	0.01634
4	$W$	0.01366	0.01368	0.00133	0.00134	0.00282	0.00284
5	$W$	0.01942	0.01945	0.00267	0.00268	0.00663	0.00666
	$M_x$	0.16400	0.16455	0.03202	0.03236	0.06362	0.06411
6	$W$	0.01180	0.01177	0.00032	0.00030	0.00239	0.00237
7	$W$	0.00810	0.00801	-0.00054	-0.00056	0.00038	0.00034
	$M_x$	0.00000	-0.00053	-0.21630	-0.22207	-0.32430	-0.32821
8	$M_y$	0.00000	0.00007	-0.06490	-0.06482	-0.09729	-0.09667
	$M_x$	0.00000	0.00022	-0.06019	-0.04993	-0.12170	-0.11196

参考文献

1 铁摩辛柯 S,沃诺斯基 S. 板壳理论·北京:科学出版社,1977

2 姜 锐,矩形薄板弯曲在边界局部或集中荷载作用下统一求解方法:[学位论文]·郑州:郑州工业大学,1997

Rectangular Plate Bending with Two Opposite Edges  
Supported and Two Edges Free

Jiang Rui      Xu Qilou      Li Fang  
(Zhengzhou University of Technology)

**Abstract** In this paper, a uniform method is unitized to solve the problems in relation to the bending of three rectangular plate with two opposite edges supported and two edges free are resolved under various loads. The results show that the method has the advantages of rapid convergence and high precision.

**Keywords** Bending of elastic plate; boundary conditions; uniform solution