第19卷 第4期 郑州工业大学学报 Vol.19 No.4
1998年 12 月 Journal of Zhengzhou University of Technology Dec. 1998

用边界轮廓法求解断裂力学L积分

陈颂英 唐委校 冷 霞 郑 雯
(山东工业大学化工系,济南,250061)

摘 要 证明断裂力学L积分方程的被积函数的散度等于零,将面积分转化为线积分,使求解问题的维数降低两维。利用边界轮廓法的结果,使平面断裂问题L积分的求解转化为边界点的位移和面力线性迭加,避免了求解数值积分。

关键词 断裂力学;边界元法;L积分
中图分类号 TV 313

L积分作为断裂力学的不变积分之一,体现了断裂力学的能量守恒定律,描述了裂纹尖端应力奇异性的不变特性,积分回路中只要包含裂纹尖端的应力奇异性,其值均与路径无关。Rice[1]将其解释为绕坐标轴转动时的能量释放率,Hemnann[2]给出了在特定条件下,L积分与J_2积分的关系式,Sun Shuxun[3]推导了L积分的守恒性。目前,关于L积分研究的文献报导还较少,尚未涉及其计算问题。

本文推证L积分方程的被积函数的散度等于零,将被积函数表达为某一矢量场的旋度,再代入积分方程中,应用Stokes公式,将平面断裂问题的L积分转化为边界点积分势函数的点值计算,从而使求解问题的维数降低两维。利用陈颂英[4]所建立的边界轮廓法的结果,将L积分的计算转化为已求得的边界点的位移和面力的代数和,避免了求解奇异积分。文中给出平面问题的算例。

1 边界轮廓法

传统的无体力边界积分方程[5]为:

$$C_{ik}(P)u_i(P)=\int_{\partial B}\left[U_{ik}(P,Q)\sigma_{ij}(Q)-\Sigma_{ijk}(P,Q)u_i(Q)\right]e_j\cdot \mathrm{d}S \tag{1}$$

式中C_{ik}为角张量,P为源点,Q为场点,u_i和σ_{ij}分别为位移和应力分量,e_j为Cartesian单位矢量,∂B为弹性体边界,dS为边界变元矢量,U_{ik}和Σ_{ijk}为Kelvin核函数。

将方程(1)中的被积函数记为:

$$F_k=\left[U_{ik}(P,Q)\sigma_{ij}(Q)-\Sigma_{ijk}(P,Q)u_i(Q)\right]e_j \tag{2}$$

对上式在场点Q处求散度,由文献[4]知:

$$\nabla_Q\cdot F_k=0 \tag{3}$$

由场论知,存在矢量$V=\Phi_k e_3$(Φ_k称为位移势),满足$F_k=\nabla_Q\times V$,对于二维平面问题,将弹性体边界离散为N个单元,原积分方程(1)化为:

$$C_{ik}(P)u_i(P)=\sum_{L=1}^{N}\left[\Phi_k(x_2,y_2)-\Phi_k(x_1,y_1)\right]^{(L)} \tag{4}$$

收稿日期:1998-01-21
第一作者 男 1966年10月生 硕士学位 讲师

式中(x_1, y_1)、(x_2, y_2)为边界上相邻节点的坐标值。

文献[4]选择的满足 Navier—Cauchy 方程的二次位移形函数为：

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_7 (x^2 - y^2) - 2\alpha_8 xy) e_1 + \\ (\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y + \alpha_8 (y^2 - x^2) - 2\alpha_7 xy) e_2 \tag{5}$$

引入平移坐标系(ξ, η)，坐标原点从源点移到场点，将位移形函数表示为以下 8 种线性无关的位移场的线性组合(系数为 $\tilde{\alpha}_i$, $i=1,8$)：

$$\left.\begin{array}{l} u^1 = e_1, \quad u^2 = \xi e_1, \quad u^3 = \eta e_1, \quad u^4 = e_2, \quad u^5 = \xi e_2, \quad u^6 = \eta e_2 \\ u^7 = (\xi^2 - \eta^2) e_1 - 2\xi\eta e_2, \quad Q \quad u^8 = -2\xi\eta e_1 + (\eta^2 - \xi^2) e_2 \end{array}\right\} \tag{6}$$

利用边界曲线单元两端点(设两端点为 R, S)位移和面力，构造方程组：

式中

$$\{P\} = [T(\xi, \eta)]\{\tilde{\alpha}\} \tag{7}$$

式中$\{P\} = \{u_1^R \quad u_2^R \quad t_1^R$ 为 t_2^R 为 u_1^S Q $u_2^S \quad t_1^S \quad T_2^S\}^T$, $[T(\xi, \eta)]$ 中的元素由两端点 R, S 在新坐标系中的坐标及曲线的外法线的方向确定，$\{\tilde{\alpha}\}$ = P $\{\tilde{\alpha}_1 \quad \tilde{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\alpha}_8\}^T$。

对应于 8 种位移场，位移势亦可表示为位移势函数 φ_{ki}($i=1\sim8$, $k=1\sim2$)的线性组合：

题，

$$[\Phi_k] = [\varphi_{ki}]\{\tilde{\alpha}\} \qquad \triangledown \tag{8}$$

因此，位移方程(4)可化为：

的灰

$$C_{ik}(P)\, u_i(P) = \sum_{L=1}^{N} \{[\triangle \varphi_{ki}]_, [T(\xi, \eta)]_x^{-1} \{P\}\}^{(L)} \tag{9}$$

由此构成定解方程组，将已知和未知的参量分别归并，即可解出边界上未知的位移和面力参量。

2 断裂力学 L 积分的求法

断裂力学 L 积分方程[6]为：

$$L = \int_{\partial B} \varepsilon_{3\alpha\beta} (W x_\beta n_\alpha + T_\alpha u_\beta - T_k u_{k,\alpha} x_\beta)\, \mathrm{dS} \tag{10}$$

其中∂B 为在 x_1, x_2 平面内的封闭回路，$\varepsilon_{3\alpha\beta}$为交替张量，$W$ 为应变能密度，且有：

$$W = \frac{1}{4G}\{(1-\mu)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) - 2\mu\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2\} \tag{11}$$

将 $T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2$, $T_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2$ 代入式(10)，将被积函数表示为：

$$B \cdot n = \{[W x_2 + \sigma_{11} Z_1 + \sigma_{12} Z_2] e_1 + [-W x_1 + \sigma_{12} Z_1 + \sigma_{22} Z_2] e_2\} \cdot n \tag{12}$$

式中 $Z_1 = u_2 - x_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + x_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$, $Z_2 = x_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - u_1$

对矢量 B 求散度，容易证明：

$$\triangledown_Q \cdot B = O \tag{13}$$

同样存在矢量 $W = \Psi_{e_3}$(Ψ 为 L 积分势)，满足 $B = \triangledown_Q \times W$，且有：

$$B_1 = Wx_2 + \sigma_{11} Z_1 + \sigma_{12} Z_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2},\ B_2 = - Wx_1 + \sigma_{12} Z_1 + \sigma_{22} Z_2 = - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \tag{14}$$

将 Ψ 表达为对应于 8 种位移场的 8 个 L 积分势函数 $\Psi_i(i=1,8)$的线性组合：

$$\Psi = [\ \Psi_i \{ \tilde{a} \ ) \tag{15}$$

因此，L 积分的计算转化为边界上已求得的位移和面力的线性迭加：

$$u \qquad u \quad L = \sum_{S=1}^{N} \{ [\ \Delta\Psi_i\ [\ T(\zeta, \eta)\ ^{-1} \{ P \quad ^{(S)} \tag{16}$$

将式(14)中的 Ψ 用 Ψ_i 代替，x_1，x_2 分别用 ξ，η 代替，根据 8 种位移场式(6)，通过式(14)求得 B_1，B_2，再进行积分，即可分别求出 $\Psi_i(i=1,8)$如下：

$$\Psi_1(\xi, \eta) = 0;\ \Psi_2(\xi, \eta) = \frac{G}{2(1-2\mu)} \{ (\mu-1)\eta^2 + (\mu+1)\xi^2\ ;\ \Psi_3(\xi, \eta) = - \frac{G}{4} r^2$$

$$\Psi_4(\xi, \eta) = 0;\ \Psi_5(\xi, \eta) = - \frac{G}{4} r^2;\ \Psi_6(\xi, \eta) = \Psi_2(\xi, \eta)$$

$$\Psi_7(\xi, \eta) = - Gr^4;\ \Psi_8(\xi, \eta) = G\{ \xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4 \}$$

式中 $r^2 = \xi^2 + \eta^2$，μ 为材料的泊松比，G 为剪切模量。

3　算例

以下算例中矩形板所受的拉伸均布力 $P=1$ Pa，材料的弹性常数 $E=200$ GPa，$\mu=0.3$。

例 1　求解受拉伸的具有双边裂纹的矩形板(图 1)的 L 积分。

这里取 $h=60$ cm，$b=40$ cm，由对称性，只研究 1/4 板，本文将其 1/4 边界离散为 32 个点，计算结果如表 1。

表 1　受拉双边裂纹矩形板的 L 积分值

a/b	0.2	0.4	0.6	0.8
本文 L 积分 P_am^2	2.1478E−13	1.14206E−12	2.93369E−12	1.83245E−11

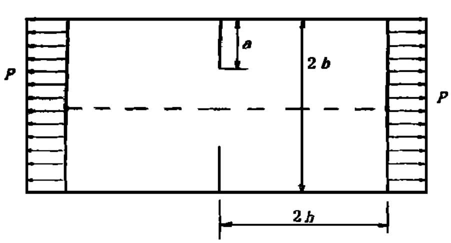

图 1　受拉双边裂纹矩形板

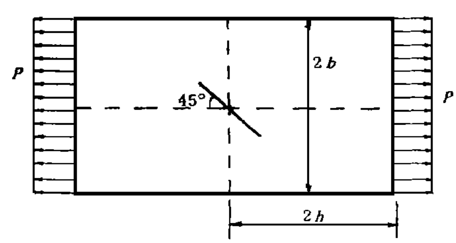

图 2　受拉斜裂纹矩形板

例 2　具有中心斜裂纹的受拉平板(图 2)，裂纹倾角为 45 度，$h=20$ cm，$b=10$ cm，裂纹长度为 $2a$，a/b 分别等于 0.2，0.3，0.4，0.5，平板四周离散为 24 个单元，斜裂纹的两个表面分别离散为 6 个单元，求得的 L 积分值如表 2。

表 2　受拉斜裂纹矩形板的 L 积分值

a/b	0.2	0.3	0.4	0.5
本文 L 积分 P_am^2	1.05063E−13	1.67563E−13	2.42137E−13	3.34246E−13

4 结论

本文推证了断裂力学 L 积分方程的被积函数的散度等于零，将被积函数表达为某一矢量场的旋度，应用 Stokes 公式，将面积分转化为 L 积分势函数在边界点的数值计算，从而使求解问题的维数降低两维。利用边界轮廓法的结果，将 L 积分的计算转化为已求得的边界点的位移和面力的代数和。此方法所需的数据准备工作量低，单元数量少，为 L 积分的计算提供了一种新的方法。

参考文献

1 Rice J R, Budiansky B. Conservation Laws and Energy－Release Rates. Journal of Applied Mechanics, 1973, 40:201～203

2 Herrmann G, King R B. Nondestructive Evaluation of Jand M Integrals. Journal of Applied Mechanics, 1981, 48:83～87

3 Sun Shuxun. Dual Conservation Laws in Elastostatics. International Journal of Engineering Science, 1985, 23(11):1179～1186

4 陈颂英，孙树勋，周慎杰. 边界轮廓法在平面问题中的应用. 郑州工业大学学报，1997，18(增刊):40～45

5 Rizzo F J. An Integral Equation Approach to Boundary Value problems of Classical Elastostatics. Quarterly of Applied Mathematics, 1967, 25:83～95

6 沈其麟. 高等断裂力学. 北京：北京航空学院出版社，1987. 168～172

The Evaluation of L Integral With Boundary Contour Method

Chen Songying　Tang Weixiao　Leng Xia　Zheng Wen

(*Shandong University of Technology*)

Abstract The divergence free property of L integral of fracture mechanics is presented in this paper, the integrand is replaced by a curl of one vector function. Surface integral is converted to linear integral in terms of Stokes' theorem so that two dimensions of the original problems are reduced and tractions on the boundary point solved by Boundary Contour Method and numerical integrals are unnecessary.

Keywords fracture mechanics; boundary element method; L integral