第19卷 第3期　　郑州工业大学学报　　Vol.19 No.3
1998年 9 月　　Journal of Zhengzhou University of Technology　　Sep. 1998

在逆系统方法中单输出时变系统规范型状态观测器的设计方法*

常永英
(郑州工业大学计自系)

李育文
(郑州轻工业学院，郑州，450002)

张松枝
(河南教育学院，郑州，450002)

摘　要　在逆系统方法中的状态观测器理论的基础上，给出了单输出时变系统的规范型状态观测器的设计方法与具体步骤。该方法不仅适用于线性系统，而且适用于非线性系统。

关键词　可观性；逆变换；坐标变换；状态观测器

中图分类号　TP271

0　引　言

在非线性控制的逆系统方法中，所给出的所有非线性控制技术都需要采用全状态反馈，为了更好地利用非线性控制技术[1,2]，开发构造非线性状态观测器的设计理论与设计方法是1个重要的研究方向，这方面的研究成果已有很多，设计理论也日臻成熟，但设计方法还不够完善。本文以逆系统方法中所述理论为基础，给出了非线性单输出时变系统的规范型状态观测器的设计方法与具体步骤。

1　设计原理

对于单输出一般时变系统$\sum$：

$$\sum_m : \begin{cases} \dot{x} = f(x,t) & x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^n \\ y = h(x,t) & y \in \mathbf{R}^1 \end{cases} \tag{1}$$

其中 x 为状态，h 为输出，t 为时间。

如果 x 满足可观性条件，且能够找到一个如式(2)

$$x = \omega(x^*, t)$$

或

$$x^* = \omega^{-1}(x, t) \tag{2}$$

其中 x^* 为观测器规范型$\sum^*$的状态向量，可经坐标变换而得到，见式(12)～式(20)。

(由式(2)到式(3)的必要条件见2.3，充分条件见2.6)。

将系统$\sum$化为式(3)所示的状态方程

* 河南省科技攻关资助项目(971160213)
收稿日期：1997－12－11
第一作者　女　1963年10月生　大专　工程师

$$\sum\nolimits^{*}\begin{cases}\dot{x}^{*}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}}_{E_n}x^{*}-\underbrace{\begin{bmatrix}a_0^{*}(x_n^{*},t)\\\vdots\\\vdots\ \text{,郑}\\a_{n-1}^{*}(x_n^{*},t)\end{bmatrix}}_{a^{*}(x_n^{*},t)}, \qquad x^{*}(t_0)=x_0^{*}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad f^{*}(x_n^{*},t)\\ \text{输出}\ y=(0\cdots0\quad1)x^{*}=c^{*}x^{*}\end{cases}\tag{3}$$

所表示的系统,则称$\sum^{*}$为$\sum$的 1 个观测器规范型,并且,系统$\sum$的观测器可做如下设计。

1.1 设计规范型系统$\sum^{*}$的观测器。

在规范型系统$\sum^{*}$的方程中,由于时变非线性项 $a_i^{*}(x_n^{*},t)$,($i=0,1,\cdots,n-1$)可化为仅仅显含有输出 $y(t)$的形式,因而观测器方程可设计为如下形式

$$\dot{\hat{x}}^{*}=E_n\hat{x}^{*}-a^{*}(y,t)+k^{*}(y-\hat{x}_n^{*})\tag{4}$$

其中 $\hat{x}$ 为状态 x 的估计

$$k^{*}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{T}\tag{5}$$

为 1 组待定系数,可由误差方程

$$E^{*}(t)=x^{*}(t)-\hat{x}^{*}(t)\to 0$$

来确定。

1.2 对于系统$\hat{\sum}^{*}$的观测器(如方程(4)),再经过状态逆变换

$$\hat{x}^{*}=\omega^{-1}(\hat{x},t)$$

即可构成 x 的渐近观测器$\hat{\sum}$[1,2]

$$\sum:\ \begin{cases}\dot{\hat{x}}=f(\hat{x},y,t)\\\hat{x}(t_0)=\hat{x}_0\in\mathrm{R}_n\end{cases}\tag{6}$$

2 设计方法和步骤

2.1 可观性判别

首先,定义算子

$$N\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]^{T}\text{处结}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]^{T}\text{(编译}\,f^{T}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]\right\}^{T}\text{储器}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]^{T}\frac{\partial f}{\partial x}\tag{7}$$

其中 h——$h(x,t)$

f——$f(x,t)$

T——矩阵转置符号

其次,计算可观性秩条件矩阵

$$Q(x,t)=\left[\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]^{T}\quad N\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]^{T}\quad\cdots\quad N^{n-1}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]^{T}\right]^{T}\tag{8}$$

若矩阵 $Q(x,t)$的秩 rank $Q(x,t)=n$,则系统$\sum$满足可观性秩条件,系统$\sum$可观,下面进一步求非线性坐标变换式(2);否则,系统不可观,则停止运算[2]。

2.2 求变换 $x=w(x^*,t)$ 或 $x^*=w^{-1}(x,t)$ 所满足的方程

定义算子

$$\tilde{N}[q(x,t)]=-\frac{\partial}{\partial t}[q(x,t)]-\frac{\partial}{\partial x}[q(x,t)]f+\frac{\partial f}{\partial x}[q(x,t)] \tag{9}$$

其中　f——$f(x,t)$

则变换 $x=w(x^*,t)$ 或 $x^*=w^{-1}(x,t)$ 满足方程[1,2]

$$\overline{\frac{\partial w}{\partial x^*}}(x,t)=[q(x,t),\tilde{N}_q(x,t),\cdots,\tilde{N}^{n-1}q(x,t)] \tag{10}$$

其中　$q(x,t)$——$Q^{-1}(x,t)[0,0,\cdots,1]^T$，即 $Q^{-1}(x,t)$ 的最后一列向量

$\tilde{N}^{n-1}$——算子对某一函数作用 $(n-1)$ 次

2.3 验证系统 $\sum$ 存在变换 $x=w(x^*,t)$，使系统可经过变换化为观测器规范型所应满足的必要条件[2]

首先，求 $\left[\overline{\frac{\partial w}{\partial x^*}}(x,t)\right.$ 的逆阵 $\left[\overline{\frac{\partial w}{\partial x^*}}\right]^{-1}$ 并计算 $\tilde{N}^n q(x,t)$，然后求下列矩阵的秩，即

$$\operatorname{rank}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\left[\overline{\frac{\partial w}{\partial x^*}}(x,t)\right]^{-1}\cdot\tilde{N}^n q(x,t)\\ h(x,t)\end{bmatrix} \tag{11}$$

若上述秩等于1，则接着往下进行；否则，停止运算。

2.4 求可观规范型的非线性项 $a^*(x_n^*,t)$

首先，比较 $\sum$ 和 $\sum^*$ 的输出方程，可知必有

$$x_n^*=h(x,t) \tag{12}$$

其次，定义

$$-\left[\overline{\frac{\partial w}{\partial x^*}}(x,t)\right]^{-1}\cdot\tilde{N}_q^n(x,t)=b^*(x_n^*,t) \tag{13}$$

而
$$b^*(x_n^*,t)=[b_0^*(x_n^*,t),\cdots,b_{n-1}^*(x_n^*,t)]^T \tag{14}$$

因
$$-\left[\overline{\frac{\partial w}{\partial x^*}}(x,t)\right]^{-1}\cdot\tilde{N}_q^n(x,t)=\frac{\partial a^*}{\partial x_n^*}(x_n^*,t) \tag{15}$$

必有
$$a_i^*(x_n^*,t)=\int b_i^*(x_n^*,t)\,dx_n^* \tag{16}$$

由此，可求出

$$a^*(x_n^*,t)=[a_0^*(x_n^*,t),\cdots,a_{n-1}^*(x_n^*,t)] \tag{17}$$

将式(17)代入式(3)即得到规范型 $\sum^*$ 的表达式[1,2]。

2.5 求坐标变换方程 $x^*=w^{-1}(x,t)$

由于
$$x_n^*(x,t)=h(x,t)$$

又由式(3)得递推公式为

$$x_i^*(x,t)=\dot{x}_{i+1}^*+a_i^*(x_n^*,t)=Dx_{i+1}^*(x,t)+a_i^*[h(x,t),t] \tag{18}$$

其中 $i=n-1,n-2,\cdots,1$

$$Dx_{i+1}^*(x,t)\triangleq\frac{\partial}{\partial t}x_{i+1}^*(x,t)+\frac{\partial x_{i+1}^*(x,t)}{\partial x}\cdot f(x,t) \tag{19}$$

由上述递推公式(18)可求出逆变换的表达式为[2]

$$x^{*}=w^{-1}(x,t)=\left[x_1^{*}(x,t),\cdots,x_{n-1}^{*}(x,t),h(x,t)\right]^{T} \tag{20}$$

进而可求出变换 $x=w(x^{*},t)$。

2.6 验证系统Σ存在变换 $x=w(x^{*},t)$使系统可经过该变换化为观测器规范型的充分条件

首先对式(20)进行求导,求出 $\dot{x}^{*}$,并将系统方程Σ代入 $\dot{x}^{*}$ 中,其次按 2.4 中的方法求出观测器规范型,并将式(20)代入后与上述 $\dot{x}^{*}$ 进行比较,若比较结果相等,则充分性得证;若比较结果不相等,则停止运算[1,2]。

2.7 构造规范型系统的状态观测器

当按 2.4 中的方法求出观测器规范型后,可构造规范型时变系统的状态观测器方程

$$\dot{\hat{x}}^{*}=E_n\hat{x}^{*}-a^{*}(y,t)+k^{*}(y-\hat{x}_n^{*}) \tag{21}$$

其中 $k^{*}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{T}$ 为一组待定系数,由下述误差方程确定

误差

$$E^{*}(t)\triangleq\dot{x}^{*}(t)-\hat{x}^{*}(t) \tag{22}$$

而

$$E^{*}(t)=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-K_1\\1&0&\cdots&0&-K_2\\0&1&\cdots&0&-K_3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-K_n\end{bmatrix}\cdot E^{*} \tag{23}$$

由误差 $E^{*}(t)\to 0$,可用极点配置法求得 K^{*},到此可设计出规范型时变系统的状态观测器[1,2]。

2.8 求系统Σ的状态渐近观测器

对 2.7 中得到的状态观测器式(21),将状态逆变换方程 $\hat{x}^{*}=w^{-1}(\hat{x},t)$ 代入,即可构成 x 的渐近观测器,即系统Σ的状态渐近观测器[2]。

3 设计举例

考查如下系统

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}=f(x)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2+x_1\cos x_3\\x_3^{2}-x_1\\x_1\end{bmatrix}^{*}\\y=h(x)=x_3\end{cases} \tag{24}$$

的观测器设计问题。

对上述系统按第 2 部分的设计方法与步骤进行讨论,不难发现它既符合可观性条件,又可化为规范型。

由 2.4 的各公式及式(3),可得观测器规范型Σ^{*},再由 2.5 可得出逆变换的表达式,最后由式(21),重构系统Σ^{*}的状态如下

$$\dot{\hat{x}}^{*}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\hat{x}^{*}-\begin{bmatrix}-y^{2}\\y\\-\sin y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}(y-\hat{x}_3^{*}) \tag{25}$$

其中 $k^{*}=[\mathrm{k}_1, k_2, k_3]^T$ 为 1 组待定系数，由式(23)确定，它有多种选择，在此选择系数为 $k_1=1, k_2=3, k_3=3$；从而可得到规范型系统Σ^{*}的观测器方程

$$\dot{\hat{x}}^{*}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\hat{x}^{*}-\begin{bmatrix}-y^2\\y\\\sin y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}(y-\hat{x}_3^{*}) \tag{26}$$

出观　的方

由上面求得的Σ^{*}的观测器方程(26)，可构成 x 的渐近观测器如下

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1=\hat{x}_2+\hat{x}_1\cos\hat{x}_3+\cos\hat{x}_3(\sin y-\sin\hat{x}_3)+(3\cos\hat{x}_3+2)(y-\hat{x}_3)\\ \dot{\hat{x}}_2=y^2-\hat{x}_1+\sin\hat{x}_3-\sin y-2(y-\hat{x}_3)\\ \dot{\hat{x}}_3=\hat{x}_1-\sin\hat{x}_3+\sin y+3(y-\hat{x}_3)\end{cases} \tag{27}$$

到此设计过程结束。

4　结束语

需要指出，并不是所有的系统都可化为观测器规范形式，对一般的非线性系统来说，在一定程度上限制了规范型观测器的适用范围，若系统不能满足可化为观测器规范型的条件时，可考虑选择小误差观测器的设计，然而，对于观测误差比较大的情况，其观测器的设计问题理论上仍未完全解决，因此，寻求既具有大范围的收敛特性，又具有普遍意义的观测器的设计方法，将是 1 个有待研究的问题。

参考文献

1　Li Chunwen, Luo Wentao. Obserring Non－linear Time－variable Systems Through a Canonical From Observer. Int. J. Control, 1986(6): 20～24

2　李春文，冯元琨.多变量非线性控制的逆系统方法.北京：清华大学出版社，1991.124～159

The Design Method of Canonical Form State Observer of Single Output Time－variable Systems in the Inverse Systems Method

Chang Yongying

(*Zhengzhou University of Technology*)

Li Yuwen　　Zhang Songzhi

(*Zhengzhou Institute of Light Industry*)　(*Henan College of Education*)

Abstract　This article describes the design method and steps of canonical from state observer of single output nonlinear systems, based on the theory of the state observers in the inverse systems method. The method is suitable not only for nonlinear systems, but also for linear systems.

Keywords　observability; inverse transformation; coordinate transformation; state observer