第19卷 第3期　　郑州工业大学学报　　Vol.19 No.3
1998年 9 月　　Journal of Zhengzhou University of Technology　　Sep. 1998

数字特征的应用

李凌之
(解放军信息工程学院,郑州,450002)

摘　要　应用概率论知识,讨论了随机变量的数字特征在理论与实际问题中的应用。

关键词　数学期望;方差;二项分布;正态分布;泊松定理;中心极限定理
中图分类号　O211

1　数字特征在理论中的应用

概率统计中的许多问题涉及到古典概率的计算以及定积分与重积分的计算。但其中有一部分问题与常用分布的数字特征有关,而常用分布的数字特征是我们所熟悉的。若能将所求概率问题转化为常用分布的数字特征,便能使问题大大简化。这种方法在概率 及数理统计的理论研究和应用中都会起到重要作用。

下面通过例题说明这一方法。

例1. 甲袋中装有 a 只白球 b 只黑球,乙袋中装有 α 只白球,β 只黑球。现从甲袋中摸出 $c(c\leqslant a+b)$ 只球放入乙袋中,求从乙袋中再摸1球为白球的概率。

解:设 X 表示从甲袋摸出 c 只球中的白球数,Y 表示乙袋中的白球数,A 表示从乙袋中摸1球为白球。

则
$$Y=\alpha+X$$

因为
$$P\{X=k\}=\frac{C_a^k C_b^{c-k}}{C_{a+b}^c},\qquad k=0,1,2,\cdots,a$$

所以 X 服从超几何分布

$$E(X)=\frac{ac}{a+b}$$

$$E(Y)=\alpha+E(X)=\alpha+\frac{ac}{a+b}$$

所以从乙袋中摸一球为白球的概率是

$$P=\sum_{k=0}^{a}P\{X=k\}P\{A\mid X=k\}=$$
$$\sum_{k=0}^{a}\frac{\alpha+k}{\alpha+\beta+c}P\{X=k\}=$$
$$\frac{E(Y)}{\alpha+\beta+c}=\frac{(\alpha+c)a+\alpha b}{(a+b)(\alpha+\beta+c)}$$

收稿日期:1997－07－03;修改稿返回日期:1998－04－13
第一作者　女　1951年2月生　学士学位　讲师

注:因为 $P\{X=k\}=\dfrac{C_a^k C_b^{c-k}}{C_{a+b}^c}$,　　$k=0,1,2,\cdots,a$ 且 $\sum\limits_{k=0}^{a}\dfrac{C_a^k C_b^{c-k}}{C_{a+b}^c}=1$

所以

$$E(X)=\sum_{k=0}^{a}kP\{X=k\}=$$

$$\sum_{k=0}^{a}k\cdot\frac{C_a^k C_b^{c-k}}{C_{a+b}^c}= \qquad \left(C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}\right)$$

$$\frac{ab}{a+b}\sum_{k=1}^{a}\frac{C_{a-1}^{k-1}C_b^{c-k}}{C_{a+b-1}^{c-1}}= \qquad (令\ m=k-1,则\ k=m+1)$$

$$\frac{ab}{a+b}\sum_{m=0}^{a-1}\frac{C_{a-1}^{m}C_b^{(c-1)-m}}{C_{(a-1)+b}^{c-1}}=\frac{ac}{a+b}$$

例 2. 袋中装有 a 只白球 b 只黑球,每次摸出 1 球后总是放入 1 只白球,这样进行了 n 次后,再从袋中摸 1 只球,求它是白球的概率。

解:设 $r\cdot v\cdot$

$$X_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 次摸出黑球\\ 0, & 第\ i\ 次摸出白球\end{cases} \qquad (1\leq i\leq n)$$

$$E(X_1)=\frac{b}{a+b}$$

$$E(X_2)=E\left(\frac{b-X_1}{a+b}\right)=\frac{1}{a+b}E(b-X_1)=\frac{b(a+b-1)}{a+b}$$

$$E(X_3)=E\left(\frac{b-X_1-X_2}{a+b}\right)=\frac{1}{a+b}[b-E(X_1)-E(X_2)]=$$

$$\frac{b-\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{b(a+b-1)}{a+b}}{a+b}=\frac{b(a+b-1)^2}{(a+b)^3}$$

由此类推,可得

$$E(X_n)=\frac{b(a+b-1)^{n-1}}{(a+b)^n}$$

所以,第 n 次摸黑球的概率为

$$P=E(X_n)=\frac{b(a+b-1)^{n-1}}{(a+b)^n}$$

$$P\{n\ 次后,从袋中摸一球得白球\}=1-\frac{b}{a+b}\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^{n-1}$$

例 3. 设 $r\cdot v\cdot X_1,X_2$ 相互独立均服从 $N(\mu,\sigma^2)$,求 $E(|X_1-X_2|)$。

解:因为 X_1,X_2 相互独立,所以(X_1,X_2)的联合密度为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2]}$$

$$-\infty<x_1<+\infty,\ -\infty<x_2<+\infty$$

故

$$E(|X_1-X_2|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x_2|f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=$$

$$(令\ y_1 = x_1 - \mu, y_2 = x_2 - \mu, 则\ x_1 = y_1 + \mu, x_2 = y_2 + \mu)$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|y_1 - y_2| e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 =$$

$$(令\begin{cases} y_1 = r\cos\theta \\ y_2 = r\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r < +\infty) =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}|\cos\theta - \sin\theta| d\theta \int_0^{+\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{2\pi}|\cos\theta - \sin\theta| d\theta \int_0^{+\infty} r^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\frac{\sigma^2}{2}\int_0^{2\pi}|\cos\theta - \sin\theta| d\theta =$$

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta - \sin\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}}(\sin\theta - \cos\theta)d\theta +$$

$$\int_{\pi+\frac{\pi}{4}}^{2\pi}(\cos\theta - \sin\theta])d\theta =$$

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\cdot 4\sqrt{2} = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

注：积分 $\int_0^{+\infty} r^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$ 是正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 方差的一半，故为 $\frac{\sigma^2}{2}$。

2 商品进货数的确定问题

商业是最早使用概率论的部门之一，商店为了估计利润亏损，要计算各种各样的概率，商品进货数的确定问题就是概率论在商业中的1个应用问题。

某商店1个月末某种应时商品的销售量 X 服从 $b(5, 0.7)$，每售出1件获利润400元，如果到月未尚有剩余商品，则每件亏损500元，试确定月初此种商品的进货数，使商店所获得利润的期望最大。

设 S 表示月初此种商品的进货数，进货所得利润为 Y_S，则 Y_S 是 $r\cdot v\cdot$，且有

$$Y_S = \begin{cases} 400S, & X \geqslant S \\ 400X - 500(S - X) = 900X - 500S, & X < S \end{cases}$$

又因为 $X \sim b(5, 0.7)$，所以

$$P\{X = k\} = C_5^k(0.7)^k(0.3)^{5-k}, \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

故
$$E(Y_S) = 400S\sum_{k=S}^{5}C_5^k(0.7)^k(0.3)^{5-k} + 900\sum_{k=0}^{S-1}kC_5^k(0.7)^k(0.3)^{5-k} -$$
$$500S\sum_{k=0}^{S-1}C_5^k(0.7)^k(0.3)^{5-k} =$$

$$400S-900\sum_{k=0}^{S-1}(S-k)C_5^k(0.7)^k(0.3)^{5-k}$$

$S=1, E(Y_1)=400-900\times(0.3)^5=397.813$(元)

$S=2, E(Y_2)=400\times2-900\times2\times(0.3)^5-900\times5\times0.7\times(0.3)^4=770.11$(元)

同理，$S=3, E(Y_3)=1023.339$(元)；$S=4, E(Y_4)=998.737$(元)；$S=5, E(Y_5)=650$(元)

所以当 $S=3$ 时商店所获利润的期望最大。

一般某商店 1 个月内某种应时商品的销售量 $X\sim b(n,p)$，每售出 1 件获利润 b 元，如果到月末尚有剩余商品，则每件亏损 l 元，确定月初此种商品的进货数，使商店所获利润的期望最大。

设 Y_S 表示月初进货 S 件所获利润，则 Y_S 是 $r\cdot v\cdot$ ，且

$$Y_S=\begin{cases} bs, & X\geqslant S \\ bX-l(S-X)=(b+l)X-lS, & X<S \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} E(Y_S)=&bS\sum_{k=S}^{n}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}+(b+l)\sum_{k=0}^{S-1}kC_n^kp^k(1-p)^{n-k}-\\ &lS\sum_{k=0}^{S-1}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\\ &\left[bS\sum_{k=S}^{n}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}+bS\sum_{k=0}^{S-1}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\right.+\\ &(b+l)\sum_{k=0}^{S-1}(S-k)C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\\ &bS-(b+l)\sum_{k=0}^{S-1}(S-k)C_n^kp^k(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

积　分

又

$$\begin{aligned} E(Y_{S+1})-E(Y_S)=&b+(b+l)\left[\sum_{k=0}^{S-1}(S-k)C_n^kp^k(1-p)^{n-k}-\right.\\ &\left.\sum_{k=0}^{S}(S-k+1)C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\right]=\\ &b-(b+l)\sum_{k=0}^{S}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\geqslant0 \end{aligned}$$

可知

$$\sum_{k=0}^{S}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\leqslant\frac{b}{b+l}$$

当 P 不太接近于 0 或 1，而 n 又比较大时，由德莫佛一拉普拉斯中心极限定理可知

$$\sum_{k=0}^{S}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=P\{0\leqslant X\leqslant S\}=$$

$$P\left\{\frac{-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\leqslant\frac{X-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\leqslant\frac{S-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right\}\approx$$

$$\Phi\left(\frac{S-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)-\Phi\left(\frac{-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)=$$
$$\Phi\left(\frac{S-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)+\Phi\left(\frac{nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)-1$$

又因为 n, P, b, l 均已知,查标准正态分布表可得到 S 的值。

若 P 接近于 0 或 1, n 又比较大时,由泊松定理可知

$$\sum_{k=0}^{S} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = P\{0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mathrm{S}\} \approx$$
$$\sum_{k=0}^{S} \frac{(nP)^k}{k!} e^{-(nP)} = 1-\sum_{k=S+1}^{\infty} \frac{(nP)^k}{k!} e^{-(nP)}$$

即
$$1-\sum_{k=S-1}^{\infty} \frac{(nP)^k}{k!} e^{-(nP)} \leqslant \frac{b}{b+l}$$
$$\sum_{k=S}^{\infty} \frac{(nP)^k}{k!} e^{-(nP)} \geqslant \frac{b}{b+l}$$

又因为 n, P, b, l 均已知,查泊松分布表,即可确定 S。

如果 n 不大时,选择 S,使 $\sum_{k=0}^{S} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 从小于 $\frac{b}{b+l}$ 的方向最接近 $\frac{b}{b+l}$,是这类决策问题中的最佳选择。

在上面的具体问题中,使

$$\sum_{k=0}^{S} C_5^k (0.7)^k (0.3)^{5-k} \leqslant \frac{400}{400+500} = \frac{4}{9}$$

成立的最大 $S=3$。

参考文献

1 复旦大学编. 概率论. 北京:人民教育出版社,1979.164~189

2 浙江大学编. 概率论与数理统计. 北京:高等教育出版社,1979.99~110

The Application of Moments

Li Lingzhi

(*PLA Information Engineering Institute*)

Abstract This paper discusses the applications of moments of random variables to theoretical and practical problems, which based on the probability theory.

Keywords mathematical expectation; variance; binomial distribution; normal distribution; Poisson distribution; central limit theorem