等价无穷小替换定理的一点注记

成立社
(郑州工业大学数力系)

摘 要 对无穷小提出了新的分类法,并对等价无穷小替换定理的条件进行了简化,从而使得该定理应用更加方便。

关键词 无穷小;类等价无穷小;等价替换
中图分类号 O173

0 引言

在我们现行所使用的本科《高等数学》教材中,甚至在数学专业的《数学分析》教材中,关于等价无穷小替换定理的叙述均为:

设 α, α'; β, β'均为同一个极限过程中的无穷小,且 $\alpha\sim\alpha'$; $\beta\sim\beta'$,而$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A$($A$ 为有限数或为∞),则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A$($A$ 为有限数或为∞)。

这是我们所常见的结论,其证明见文献[1],那么若$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$不存在也不为无穷大时,原极限$\lim\frac{\beta}{\alpha}$还存在吗? 本文给出了肯定的回答。并且对无穷小提出了新的分类法,从此分类法可知常见的等价替换均属于第一类无穷小,而不能是第二类无穷小,但在某些条件下第二类无穷小也可以代替,本文给出了结论。以下所谈的无穷小,均以 $x\to x_0$ 的情况为例,其它极限过程只须在文字上稍加变通,故而不再赘述。

1 无穷小的分类法

1.1 定义 设 $\alpha(x)$是以 $x\to x_0$ 时的无穷小,若存在 x_0 的一个去心邻域,$\alpha(x)$在其邻域内任何点处的值均不为零,则称 $\alpha(x)$ 为第一类无穷小。否则,即若 $\alpha(x)$在 x_0 的任何去心邻域内均有零值点,则称 $\alpha(x)$为第二类无穷小。

1.2 定义 设 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$均为 $x\to x_0$ 时的无穷小,若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$称

收稿日期:1997—09—29
第一作者 男 1963年8月生 学士学位 讲师

为等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$。

由此可知作为比较基准的无穷小 $\beta(x)$ 必须是第一类无穷小。而不能以第二类无穷小作为比较的基准；又由第二类无穷小的定义知，第二类无穷小与第一类无穷小比较时，第二类无穷小比第一类无穷小是高价无穷小；或者它们是不能比较的。这是因为，如果 $\alpha(x)$ 是第二类无穷小，即它在 x_0 的任何去心邻域内均有零值点，于是推知 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 在 x_0 的任何去心邻域内均有零值点，故若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 存在其值必为零；若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在，它也一定不是无穷大，即 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 不能作比较。

1.3　定义　若 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 均为 $x\to x_0$ 时的第二类无穷小，但在 x_0 的某去心邻域内均有相同的零值点，而除零值点外 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是类等价无穷小，记作 $\alpha(x)\simeq\beta(x)$。

2　几个结论

定理1　设 $\alpha(x)$；$\alpha'(x)$；$\beta(x)$；$\beta'(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$；$\beta(x)\sim\beta'(x)$；若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 不存在，但也不是 ∞，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 也不存在且也不是 ∞。

证明：用反证法。假设结论不真。则有

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，　$\because\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\beta'(x)}$，由极限运算法则知：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=0$，$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}=\infty$，这与已知矛盾。故 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\neq\infty$。

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 存在，$\because\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}=\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}$，

由极限运算法则知 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 必存在，这与题设矛盾。故 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 不存在。

综上可知，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 不存在且也不是无穷大。

结合文献[1]定理，有条件简化后的定理。

定理2　设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$；$\beta(x)\sim\beta'(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$。

定理3　设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$；$\beta(x)\simeq\beta'(x)$

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 也存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}=0$；

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 也必不存在。

证明：(1)　$\because\beta'(x)$ 是第二类无穷小，且 $\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 存在，由前面讨论知，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}=0$，以下证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$ 即可。

(i)　记　$N_\beta=\{x\mid\beta(x)\neq 0\}$；$U(\hat{x}_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$

$\forall\ x_n\in N_\beta\cap U(\hat{x}_0,\delta)$　$(n=1,2,\cdots)$，且 $x_n\to x_0$　(当 $n\to\infty$ 时)有 $\beta(x_n)\sim\beta'(x_n)$，

$\alpha(x_n)\sim\alpha'(x_n)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(x_n)}{\alpha(x_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta'(x_n)}{\alpha'(x_n)}$；又∵ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}=0$，　∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(x_n)}{\alpha(x_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta'(x_n)}{\alpha'(x_n)}=0$。

(ii) $\forall\ x_n\in U(\hat{x}_0,\delta)-N_\beta$，且 $x_n\to x_0$（当 $n\to\infty$ 时），∵ $\beta(x)\simeq\beta'(x)$，∴ $\beta(x_n)=\beta'(x_n)=0$，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(x_n)}{\alpha(x_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta'(x_n)}{\alpha'(x_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0}{\alpha'(x_n)}=0$

(iii) $\forall\ x_n\in U(\hat{x}_0,\delta)$，且 $x_n\to x_0$　$(n\to\infty)$，不妨设 x_n 中所有使得 $\beta(x_n)\neq0$ 的项的全体记作 x'_{n_k}；而使得 $\beta(x_n)=0$ 的项的全体记作 x''_{n_k}，且当 $n_k\to\infty$ 时，x'_{n_k}；$x''_{n_k}\to x_0$

$\forall\ \varepsilon>0$　由(i)证明知 $\lim\limits_{n_k\to\infty}\dfrac{\beta(x'_{n_k})}{\alpha(x'_{n_k})}=0$，∴ $\exists\ N>0$，当 $n_k>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\beta(x'_{n_K})}{\alpha(x'_{n_K})}\right|<\varepsilon$

又∵ $\left|\dfrac{\beta(x''_{n_k})}{\alpha(x''_{n_k})}\right|=\left|\dfrac{0}{\alpha(x''_{n_k})}\right|<\varepsilon$ 成立。∴ $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\beta(x_n)}{\alpha(x_n)}\right|<\varepsilon$ 成立。从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(x_n)}{\alpha(x_n)}=0$

综合(i)、(ii)、(iii)由海因定理知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$。

(2)用反证法。若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 存在，类似于(1)的证法可得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 存在且为零。这与题设矛盾。

推论　若 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\simeq\alpha'(x)$，$f(x)$ 是一个有界函数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'(x)\cdot f(x)$。

3　举例

例 1　考查极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{\sin x}$ 的存在性.

解：∵ $x\to0$ 时　$\sin x\sim x$；$e^{|x|}-1\sim|x|$，

∴ $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，由定理 1 知极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{\sin x}$ 不存在。

例 2　计算 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$。

解：∵ $x\to0$，$\sin x\sim x$，$\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\simeq x^2\sin\dfrac{1}{x}$

存 在

∴由定理 3 有　$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$。

参考文献

1 盛祥耀编．高等数学上册．北京：高等教育出版社．1987，115～117
2 格•马•菲赫金哥尔茨著．吴亲仁译．数学分析原理．北京：人民教育出版社．1959，111～113

A Note on The Theorem of Equivalent infinitesimal Replacement

Cheng Lishe
(*Zhengzhou University of Technology*)

Abstract In this paper, infinitesimal classification is given and theorem condition of equivalent infinitesimal replacement is simplified, thus, this theorem is easy to operate.

Keywords infinitesimal; class equivalent infinitesimal; equivalent replacement

(上接 102 页)

Synthesis of a New "Tailed" Porphyrin

Li Tiesheng (*Zhengzhou University of Technology*)
Wu Yangjie Zhou Zhixian (*Zhengzhou University*)

Abstract A new "Tailed" porphyrin (C) has been synthesized by reaction of meso—mono (O—hydroxypheny) tri(p—chlorophenyl) porphyrin(A) with ethyl α—bromostearate. The structures of the new compound(C) is characterizel by elemental analysis, IR, UV, ′H NMR and fluorescence spectra.

Keywords systhesis; tailed prophyrin; chemical modification