第 18 卷 第 4 期
1997 年 1 2 月

郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technology

Vol.18 No.4.
Dec. 1997

截断型分布族下参数的可容许性估计的一个注记

张建国
(开封师专数学系,475001)

张新育
(郑州工业大学数理力学系)

摘　要　参数估计理论是统计决策理论的一个重要内容,本文工作是将著名统计学家 *Karlin*[1] 关于截断型分布族下参数估计可容许性的有关结果推广到 $\alpha<0$ 的情形。并给出在经济学中有广泛应用的 *Pareto* 分布族中参数 θ和 $\mathring{\theta}$ 的可容许的 *Minimax* 估计。

关键词　统计决策理论;可容许性;参数估计

中图分类号　O213、TB11

0　前言

由 $A \cdot Wald$ 于 1950 年开创的统计决策理论是数理统计的基本理论之一。参数估计是其中一个重要内容,另一重要问题是估计损失,它由著名统计学家 $J \cdot D \cdot Berger$ 几年前明确提出,估计损失 基本想法是:当在样本 Y 的分布族 $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$和损失函数 $L(\theta, d)$ 下给出参数函数 $g(\theta)$的良好估计 $d(Y)$ 时,人们希望知道实际损失 $L(\theta, d(Y))$ 有多大。但 $L(\theta, d(Y))$ 是样本 Y 和参数 θ的函数,因而需要用样本 Y 来估计它。为了把统计决策理论用于 $L(\theta, d(Y))$ 的估计,需要指定员一损失函数 $L^*(\theta, L(\theta, d(Y)); a)$。下文为了不引起混淆,称 L^* 为距离。这样一来,一致最小风险偏($UMRU$) 估计,可容许估计,$Minimax$ 估计等概念便可用于损失 $L(\theta, d(Y))$ 的估计 $\hat{L}_d(Y)$ 和它的风险函数

$$R_{L^*}(\theta, \hat{L}_d(Y)) \hat{=} EL^*(\theta, L(\theta, d(Y)); L_d(Y))$$

1　引论

考虑截断分布族:随机变量 X 具有关于 L 测度的分布密度函数为

$$f(x, \theta) = q(\theta) r(x) I_{(\theta, b)}(x), \tag{1.1}$$

此处 $\theta \in \Theta$ 为参数,参数空间 Θ 为一区间(开或闭或半开半闭),Θ 的下、上端点分别为 a 和 b,$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$,$r(x) > 0$ 对一切 $x \in (a, b)$,$\int_a^b r(x)\,dx = +\infty$,任 $\theta \in (a, b)$,有 $\int_\theta^b r(x)\,dx < +\infty$。

另一类型的截断分布族的分布密度函数为

$$f(x, \theta) = q(\theta) r(x) I_{(a, \theta)}(x), \tag{1.2}$$

收稿日期:1997-04-24
第一作者:男, 1963 年生, 讲师

其中参数空间 Θ 和对 $r(n)$ 假定与分布族(1.1)相同。

以下仅讨论 $\Theta=(a,b)$ 的情形，所述结果对 Θ 的其它情形也对。

Karlin[1] 在随机变量 X 遵从分布(1.1)或(1.2)和刻度化平方损失函数 $q^{2\alpha}(\theta)[d-q^{-\alpha}(\theta)]^2$ 之下研究 $q^{-\alpha}(\theta)(\hat{=}[q(\theta)]^{-\alpha})$ 的可容许估计问题，此处 $\alpha>0$。他证明了，对于形如 $cq^{-\alpha}(x)$（它包含了一致最小方差无偏估计(UMVUE) $(\alpha+1)q^{-\alpha}(x)$）的估计，仅有 $d_1(x)=(2\alpha+1)(\alpha+1)^{-1}q^{-\alpha}(x)$ 是可容许的，且 $d_1(x)$ 是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 的 Minimax 估计。

然而，在实际问题中，估计 $q^{-\alpha}(\theta)$ 仅考虑 $\alpha>0$ 是不够的，还须讨论 $\alpha<0$ 的情形。例如，在经济学中有着广泛应用的 Pareto 分布族

$$f(x,\theta)=\eta\theta^{\eta}x^{-(\eta+1)}I_{(\theta,\infty)}(x),\ \eta>0,\ \theta>0 \qquad (1.3)$$

其增多值和方差分别为 $(\eta-1)^{-1}\eta\theta$（当 $\eta>1$ 时）和 $(\eta-1)^{-2}(\eta-2)^{-1}\theta^2$（当 $\eta>2$ 时）。因此，当 η 已知而 θ 为参数时，估计 θ 和 θ^2 是必要的，此时分布族(1.3)是(1.1)的特殊情况，但当 $\alpha>0$ 时，$q^{-\alpha}(\theta)=\theta^{-\eta\alpha}$ 不包括 θ 和 θ^2。

假定 $x_1,\cdots,x_n$ i·i·d，x_1 遵从分布(1.1)或(1.2)记

$$T(x)=T(X_1,\cdots,X_n)=\begin{cases}\min\{X_1,\cdots,X_n\}, & \text{当 } x_1 \text{ 遵从分布(1.1) 时}\\ \max\{X_1,\cdots,X_n\}, & \text{当 } X_1 \text{ 遵从分布(1.2) 时}\end{cases} \qquad (1.4)$$

我们要估计 $q^{-\alpha}(\theta)$，此处 $\alpha\neq0$，由于 $T(x)$ 为完全充分统计量，易知当 $n+2\alpha>0$ 时，$\sigma(T)\hat{=}n^{-1}(n+\alpha)q^{-\alpha}(T(x))$ 是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 的 $a\cdot S\cdot$ 唯一的 UMVUE，我们在 2 证明，在损失函数 $q^{2\alpha}(\theta)[d-q^{-\alpha}(\theta)]^2$ 下，当 $n+2\alpha>0$ 时，$cq^{-\alpha}(T(x))\ (C>0)$ 是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 的可容许估计当且仅当 $C=(n+2\alpha)(n+\alpha)^{-1}$，且证明了 $\sigma(T)\hat{=}(n+2\alpha)(n+\alpha)^{-1}q^{-\alpha}(T(x))$ 是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 的 Minimax 估计，这把 Karlin[1]的有关结果推广到 $\alpha>0$ 的情形。作为特例，我们给出分布(1.3)中参数 θ 和 θ^2 的可容许的 Minimax 估计。

顺便指出，这些结果将用 Beyes 方法证明之，与引文[1]的证明方法是不同的。

2 引理与结果

设随机变量 X（可以是向量）的样本空间为 $(\mathcal{X},\beta_x)$，分布族为 $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ 假定：为估计参数的函数 $V(\theta)$，在损失函数 $L(\theta,a)$ 下选择了“好”估计 $d(x)$，然后估计损失 $L[\theta,d(x)]$，为了使用 Bayes 方法，我们需要在参数空间 Θ 上指定一个 $\sigma-$域 β_Θ，当 Θ 为 K 维欧氏空间的 Borel 集时，β_Θ 由 Θ 的所有 Borel 子集组成。假定 $L[\theta,d(x)]$ 为 $\beta_\Theta\times\beta_x$ 可测函数，且对任给定的 $A\in\beta_x$，$P_\theta(A)$ 作为 θ 的函数是 β_Θ 可测的。

设 H 是 β_Θ 上的一个测度，称 $\hat{g}(x)$ 是损失 $L[\theta,d(x)]$ 在距离 $L^*[\theta,L(\theta,d),a]$ 下关于 H 的比较广义 Bayes 估计(CGBE)，如果 $\hat{g}(x)$ 的风险函数 $R_{L^*}[\theta,\hat{g}(x)]<\infty\ a\cdot S\cdot H$，且对 $L(\theta,d(x))$ 的任何估计 $h(x)$，都有

$$\triangle_H^*(h(x),\hat{g}(x))\hat{=}\int_\Theta[R_L^*(\theta,h(x))-R_L^*(\theta,\hat{g}(x))]dH(\theta)\geqslant 0 \qquad (2.1)$$

显然，若 $\hat{g}(x)$ 为相应于 H 的广义 Bayes 估计，且它的广义 Bayes 风险 $R_H^*(\hat{g}(x))=$

$\int_\Theta[R_L^*(\theta,\hat{g}(x))dH(x)<\infty$，则 $\hat{g}(x)$ 是比较广义 Bayes 估计。

引理 2.1　设 H 为 β_Θ 上的测度，若 $L[\theta, d(x)]$ 的估计 $\hat{g}(x)$ 满足

(1) $R_L^*(\theta, \hat{g}(x)) < \infty$，对一切 $\theta \in \Theta$；

(2) 存在 β_Θ 上的测度序列 $\{H_m; m = 1, 2, \cdots\}$，

且对每一个 n 存在 $L(\theta, d(x))$ 的相应于 H_m 的 $CGBE\ \hat{g}_m(x)$，使得

a) $\lim\limits_{m\to\infty} H_m(F) \geqslant H(F)$，对一切 $F \in \beta_\Theta$；

b) $\lim\limits_{m\to\infty} \triangle^*_{H_m}(\hat{g}(x), g_m(x)) = 0$ ($\triangle^*_{H_m}$ 的定义见(2.1))，

则 $\hat{g}(x)$ 是关于 H 的几乎可容许估计。

这个引理是[2]中引理 1.2 的轻微推广，证明完全一样。

$Stein$ 给出的参数的几乎可容许估计是可容许估计的充分条件(见[3]中定理 2.1)在估计损失 $L(\theta, d(x))$ 时也成立，这个充分条件就是引理 2.2。

引理 2.2　设 H 为 β_Θ 上的测度，若对给定的 θ 和 x 距离 $L^*(\theta, L(\theta, d(x)); a)$ 作为 a 的函数是严凸的，且当 $\theta \in \Theta$ 和 $B \in \beta_x$ 满足 $P_\theta(B) > 0$ 时，必有 $H(\{\theta: P_\theta(B) > 0\}) > 0$，则 $L(\theta, d(x))$ 关于 H 的几乎可容许估计必是 $L(\theta, d(x))$ 的可容许诂计。

以下假定 $x_1, \cdots, x_n\ i \cdot i \cdot d$，$x_1$ 遵从分布(1.1)或(1.2)，$T(x) = T(x_1, \cdots, x_n)$ 且由(1.4)定义。

定理　在损失函数 $q^{2\alpha}(\theta)[d - q^{-\alpha}(\theta)]^2$ 和 $2\alpha > -n$ 下，$cq^{-\alpha}(T(x))$ ($C > 0$) 是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 的可容许估计，当且仅当 $C = C_0 = (n + 2\alpha)(n + \alpha)^{-1}$，而且 $\sigma(T) = C_0 q^{-\alpha}(T(x))$ 是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 的 $Minimax$ 估计。

3　定理的证明及推论

先讨论在分布族(1.1)下 $\sigma(T)$ 的可容许性。

易知 $T(x)$ 的分布密度函数为 $nq^n(\theta)q^{-(n-1)}(t)r(t)I_{(\theta, b)}(t)$，且对任 $\beta > -n$，有

$$Eq^{-\beta}(T(x)) = n(n + \beta)^{-1}q^{-\beta}(\theta) \tag{2.2}$$

注意到 $Eq^{2\alpha}(\theta)[cq^{-\alpha}(T(x)) - q^{-\alpha}(o)]^2 = n(n + 2\alpha)^{-1}c^2 - 2n(n + \alpha)^{-1}c + 1$，它在 $C = C_0$ 处达到最小，故只须证 $\sigma(T) = C_0 q^{-\alpha}(T(x))$ 是可容许的。因损失函数 $q^{2\alpha}(\theta)[d - q^{-\alpha}(\theta)]^2$ 是 d 的凸函数，$T(x)$ 为充分统计量，且 $\sigma(T)$ 的风险函数有限，故只须证明 $\sigma(T)$ 在基于 $T(x)$ 的估计类中可容许。下面用引理 2.1 及引理 2.2 证明之。

显然 $\lim\limits_{\theta\to a} q(\theta) = 0$，$\lim\limits_{\theta\to b} q(\theta) = 0$，$q'(\theta) > 0$ 对一切 $\theta \in \Theta = (a, b)$，取 $\beta_\Theta = \{B; B$ 为 Θ 的 $Borel$ 子集$\}$ 令

$$H(B) = \int_B q^{-1}(\theta)q'(\theta)d\theta \qquad B \in \beta_\Theta \tag{2.3}$$

则 $\sigma(T(x))$ 是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 关于 H 的广义 $Bayes$ 估计，易知损失函数 $q^{2\alpha}(\theta)[d - q^{-\alpha}(\theta)]^2$ 和 $T(x)$ 的分布族及由(2.3)定义的 H 满足引理 2.2 的条件，因此我们只须证引理 2.1 的条件，显然 $\sigma(T)$ 的风险函数有限，令

$$h_m(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 1 \leqslant q(\theta) \leqslant e \text{ 时} \\ 1 + m^{-1}\ln q(\theta) & \text{当 } e^{-m} < q(\theta) < 1 \text{ 时} \\ 1 - m^{-1}(\ln q(\theta) - 1) & \text{当 } e < q(\theta) < e^{m+1} \text{ 时} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$H_m(B) = \int_B q^{-1}(\theta) q'(\theta) h_m^2(\theta) d\theta, B \in \beta_\Theta \tag{2.5}$$

则 $\lim_{m\to\infty} H_m(B) = H(B)$，一切 $B \in \beta_\Theta$，且的损失函数 $q^{2\alpha}(\theta)[d - q^{-\alpha}(\theta)]^2$ 下

$$\delta_m(T(x)) = \frac{\int_a^{T(x)} q^{n+\alpha-1}(\theta) q'(\theta) h_m^2(\theta) d\theta}{\int_a^{T(x)} q^{n+2\alpha-1}(\theta) q'(\theta) h_m^2(\theta) d\theta}$$

是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 关于 H_m 的广义 $Bayes$ 估计，显然它相应于 H_m 的广义 $Bayes$ 风险有限，因而是 $CGBE$。注意到 $h_m(\theta)$ 是绝对连续函数。$n+2\alpha>0$，故由分部积分和 $Schwarz$ 不等式。

$$\triangle^*_{H_m}(\delta_1(T), \delta_m(T)) =$$

$$\int_a^b \int_a^b q^{2\alpha}(\theta) \left\{ (\delta_1(t) - q^{-\alpha}(\theta))^2 - (\delta_m(t) - q^{-\alpha}(\theta))^2 \right\} \cdot$$

$$n q^{n-1}(\theta) q^{-(n-1)}(t) r(t) q'(\theta) h_m^2(\theta) dt d\theta$$

$$= \int_a^b n(\delta_1(t) - \delta_m(t)) q^{-(n-1)}(t) r(t) \cdot$$

$$\left\{ \int_a^t [\delta_1(t) + \delta_m(t) - 2q^{-\alpha}(\theta)] q^{n+2\alpha-1}(\theta) q'(\theta) h_m^2(\theta) d\theta \right\} dt$$

$$= n \int_a^b [\delta_1(t) - \delta_m(t)]^2 q^{-(n-1)}(t) r(t) \left[\int_a^t q^{n+2\alpha-1}(\theta) q'(\theta) h_m^2(\theta) d\theta \right] dt$$

$$\frac{\left\{ n \int_a^t [(n+2\alpha)(n+\alpha)^{-1} q^{-\alpha}(t) - q^{-\alpha}(\theta)] q^{n+2\alpha-1}(\theta) q'(\theta) h_m^2(\theta) d\theta \right\}^2}{\int_a^t q^{n+2\alpha-1}(\theta) q'(\theta) h_m^2(\theta) d\theta}$$

$$= 4n(n+\alpha)^{-2} \int_a^b \frac{\left\{ \int_a^t [q^{-\alpha}(t) - q^{-\alpha}(\theta)] q^{n+2\alpha}(\theta) h_m(\theta) \frac{\partial h_m}{\partial \theta} d\theta \right\}^2}{\int_a^t q^{n+2\alpha-1}(\theta) q'(\theta) h_m^2(\theta) d\theta} q^{-n-1}(t) r(t) dt$$

$$\leqslant 4n(n+\alpha)^{-2} \int_a^b \cdot$$

$$\left\{ \int_a^t [q^{-\alpha}(t) - q^{-\alpha}(\theta)]^2 q^{n+2\alpha-}(\theta) [q'(\theta)]^{-1} \left(\frac{\partial h_m}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right\} q^{-(n-1)}(t) r(t) dt$$

$$= 4n(n+\alpha)^{-2} \int_a^b \left\{ \int_a^b [q^{-\alpha}(t) - q^{-\alpha}(\theta)]^2 q^n(\theta) q^{-(n-1)}(t) d(t) \right\} \cdot$$

$$q^{2\alpha+1}(\theta) [q'(\theta)]^{-1} \left(\frac{\partial hm}{\partial \theta} \right)^2 d\theta$$

$$= 8n(n+\alpha)^{-3}(n+2\alpha)^{-1} \alpha^2 \int_a^b q(\theta)(q'(\theta))^{-1} \left(\frac{\partial h_m}{\partial \theta} \right)^2 d\theta$$

$$= 8n(n+\alpha)^{-3}(n+2\alpha)^{-1} \alpha^2 m^{-2} \cdot$$

$$\left\{ \int_{e^{-m}<q(\theta)<1} q^{-1}(\theta) q'(\theta) d\theta + \int_{e<q(\theta)<e^{m+1}} q^{-1}(\theta) q'(\theta) d\theta \right\}$$

$$= 16n(n+\alpha)^{-3}(n+2\alpha)^{-1} \alpha^2 m^{-1} \to 0 \quad 当\ m \to \infty\ 时。$$

这证明了引理 2.1 的条件(2) 中 b) 成立，因此在分布族(1.1) 下，$\delta_1(T(x))$ 是 $q^{-\alpha}(\theta)$ 的可容许估计，又 $\delta_1(T(x))$ 的风险函数是常数，因而是 $\delta_1(T(x))$ 也是 $Minimax$ 估计。

对于分布族(1.2)，$T(x) = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ 是完全充分统计量，它的分布密度函数为

$nq^n(\theta)q^{-(n-1)}(t)r(t)I_{(a,\theta)}(t)$ 与分布族(1.1)时类似，只须证明 $\delta(T)$ 在基于 $T(x)$ 的估计类中可容许，在分布族(1.2)下，$q'(\theta)<0$ 一切 $\theta\in(a,b)$，取

$$H(B)=-\int_B q^{-1}(\theta)q'(\theta)d\theta,\ B\in\beta_\Theta$$

$$H_m(B)=-\int_B q^{-1}(\theta)q'(\theta)h_m^2(\theta)d\theta,\ B\in\beta_\Theta$$

其中 $h_m(\theta)$ 如(2.4)所示，用前面的论证方法可证，$\delta(T)$，测度 H，测度序列 $\{H_m, m\geqslant 1\}$，相应于 H_m 的 $CGBE$.

$$\delta_m(T(x))=\frac{\int_{T(x)}^{b} q^{n+\alpha-1}(\theta)q'(\theta)h_m^2(\theta)d\theta}{\int_{T(x)}^{b} q^{n+2\alpha-1}(\theta)q'(\theta)h_m^2(\theta)d\theta}$$

和损失函数 $q^{2\alpha}(\theta)[d-q^{-\alpha}(\theta)]^2$ 以及 $T(x)$ 的布族都满足引理(2.1)和引理(2.2)的条件，因而 $\delta(T(x))$ 是可容许的，又 $\delta(T)$ 的风险函数是常数，因而它是 $Minimax$ 的。

注：在定理的证明中，由(2.4)定义的 $hm(\theta)$ 可用光滑函数 $m\{m+[lnq(\theta)]^2\}^{-1}$ 代替。

推论：设 $X_1,\cdots,X_n$ $i\cdot i\cdot d$，X_1 遵从分布(1.4)，其中 $\eta>0$ 已知，记 $T(x)=min\{X_1,\cdots,X_n\}$，则有

(1) 在损失函数 $\theta^{-2}(a-\theta)^2$ 下，当 $n\eta>2$ 时，$(n\eta-2)(n\eta-1)^{-1}T(x)$ 是 θ 的可容许的 $Minimax$ 估计；

(2) 在损失函数 $\theta^{-4}(a-\theta^2)^2$ 下，当 $n\eta>4$ 时，$(n\eta-4)(n\eta-2)^{-1}T^2(x)$ 是 θ^2 的可容许的 $Minimax$ 估计。

参 考 文 献

1 Karlin, S., Admissibility for Estimation with Quadratic Loss, Ann. Math. Statist, 29(1958), 406-436

2 Cheng Ping, Admissibility of Simultaneous estimation of several paramcters. J. Sys. Sci. and Math scis. 2(1982), 176-195

3 Zidek, J. V., Sufficient condition for the Admissibility under Spuared Error Loss for Formal Bayes Estimators, Ann, Math. Statist, 41(1970), 446-465.

(下转 102 页)

6 陈坚. 化学试剂. 10 (3): 156 (1988)

Improvement of N, N′-dimethylphenyldithioxamide Synthesis Method

Liu Weiwei Ji Yanguang
Wang Xing Wang Suguang
(Huaihai Institute of Technology, Lianyungang, 222005)

Abstract N, N′-Dimethyl phenyl dithioxamide was synthe-sized by the reaction of oxlyl chloride with methylphenylamine and the sulfuration of Lawesson reagent.

Keywords Oxlyl chloride; Lawesson reagent; N, N′-dimethylphenyldithioxamide

(上接86页)

A Notation on Admissible Estimator of the Parameter in the Truncation Type Family

Zhang Jianguo
(*Kaifeng Teachers' College*, 475001)
Zhang Xinyu
(*Zhengzhou University of Technology*, 450002)

Abstract The theory of parameter estimation is an important content in the policy-making theory of statistics, and a lot of achievements in scientific research have alteady been made. This essay attempts to extend and advance the point $\alpha < 0$ according to the relivant results on admissible estimator of the parameter in the Truncation Type Fomily pointed by the famous statistician, Karlin[1], and it also states the minimax estimation on admissible estimator of Parameter θ and $\hat{\theta}$ in the Pareto Type Family used widely in Economics.

Keywords policy-making theory of statistics; admissible; parameter estimator