

回转曲面 B 样条构造方法^{*}

曲伟石 赵建国 邱 益
(郑州工业大学机械系)

摘 要 常见的双三次 B 样条曲面由 $m \times n$ 个顶点构成的特征网格唯一确定。本文介绍的一种回转曲面 B 样条构造方法只需给定草图曲线 (曲面母线) 上的 $m-2$ 个点, 文中导出了其矩阵表达形式, 并在计算机上调试验证, 画出了图形。该方法具有原始数据少、运算方法简单、占用机时少、曲面更易于控制等特点, 在产品造型 CAD 及其方案优化, 以及视频技术、广告动画设计等领域具有理论意义和实用价值。

关键词 回转曲面; B 样条
中图分类号 TH126

0 引言

给定 m 个三次 B 样条曲线特征多边形顶点 $V_i (i=1, 2, \cdots, m)$, 可构造 $m-3$ 段 B 样条曲线段 (若曲线封闭, 则为 m 段), 并自然达到 C^2 连续, 一段 B 样条曲线 $P (t)$ 的矢量矩阵形式为:

$$P(t) = [T][M][V]; \qquad 0 \leq t \leq 1 \qquad (1)$$

其中

$$[T] = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1];$$
$$[M] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$
$$[V] = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4]^T.$$

给定已知型值点列 $P_i (i=2, 3, \cdots, m-1)$, 要确定一条三次 B 样条曲线, 使其通过 P_i 点, 并以 P_i 点为节点, 则其 B 样条特征多边形顶点 $V_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 可由下述线性代数方程按迭加原理反求:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & b_1 & & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{m-3} \\ V_{m-2} \\ V_{m-1} \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_5 \\ 6p_2 \\ 6p_3 \\ 6p_4 \\ \vdots \\ 6p_{m-3} \\ 6p_{m-2} \\ 6p_{m-1} \\ b_5 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

^{*} 河南省自然科学基金资助项目: 954090116
收稿日期: 1997-01-07
(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中 $a_j, b_j (j=1, 2, \dots, 5)$ 由边界条件确定 (可参考有关书籍)。

双三次 B 样条曲面是三次 B 样条曲线的拓广。一块曲面片的矢量矩阵表达式为:

$$S(t,u) = [T][M][B][M]^T[V]^T, \quad 0 \leq t,u \leq 1 \tag{3}$$

其中 $[T] = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]$;

$$[U] = [u^3 \ u^2 \ u \ 1];$$

$[M]$ 同 (1) 式;

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{30} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix};$$

$[B]$ 是决定一个双三次 B 样条曲面片的 $4 \times 4B$ 网格顶点。

显然, 双三次 B 样条曲面片由 $m \times n$ 个顶点构成的特征网格唯一确定。对于回转曲面来说, 给定其母线草图曲线上 $m-2$ 个型值点 $P_i (i=2, 3, \dots, m-1)$, 能否构造出回转曲面? 本文对此作出了肯定的回答。

1 回转曲面的构造原理

设直角坐标系 $O-XYZ$ 如图1所示。在 $Y=1$ 平面上有圆 $C(u)$, 圆心 $(0, 1, 0)$, 半径 $R=1$ 。在 $X=Z$ 平面上有曲线 $P(t)$ 。 $C(u)$ 、 $P(t)$ 均为三次 B 样条曲线, 分别以 u, t 为参数, 按 (1) 式, 其矩阵表达式分别为:

$$P_i(t) = [T][M][V];$$

$$C_j(u) = [U][M][W];$$

$$i=2, 3, \dots, m-2; j=1, 2, \dots, n; 0 \leq t, u \leq 1;$$

其中, $[T]$ 、 $[U]$ 、 $[M]$ 同式 (3); $[V]$ 、 $[W]$ 分别是 $P_i(t)$ 、 $C_j(u)$ 的特征多边形顶点 (顶点数分别为 m 、 n) 矢量矩阵:

$$[V] = [V_{i-1} \ V_i \ V_{i+1} \ V_{i+2}]^T;$$

$$[W] = [W_j \ W_{j+1} \ W_{j+2} \ W_{j+3}]^T;$$

$$(当 j > n-3 时, W_{n+1}=W_1, W_{n+2}=W_2, W_{n+3}=W_3);$$

则有如下结论:

以 $P(t)$ 与 $C(u)$ 三坐标分量的积作分量所构成的矢量 $S(t, u)$, 即表示曲线 $P(t)$ 在 XOY 坐标面上的投影绕 Y 轴回转形成的曲面。其分量矩阵表达式为:

$$S_{i,j}(t,u) = [T][M][V][W]^T[M]^T[U]^T \tag{4}$$

$$i=2, 3, \dots, m-2; j=1, 2, \dots, n; 0 \leq t, u \leq 1, 式中 [V]、[W] 分别为三坐标分量。$$

下面将 (4) 式改为如下分量形式并对上述结论给予证明:

$$\begin{aligned} S(t,u) &= \{S_x(t,u), S_y(t,u), S_z(t,u)\} \\ &= \{P_x(t) \cdot C_y(u), P_y(t) \cdot C_y(u), P_z(t) \cdot C_z(u)\} \end{aligned}$$

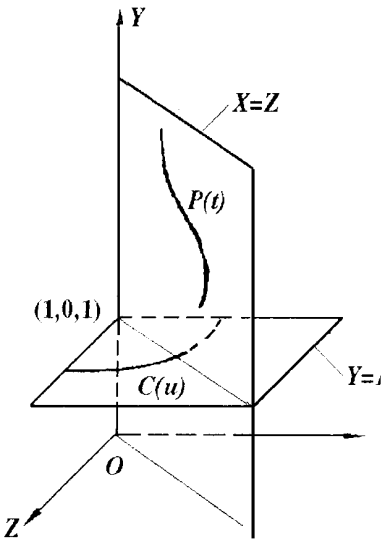


图1 回转曲面构造原理

证明 由已知条件 $C(u)$ 在 $Y=1$ 平面上; $P(t)$ 在 $X=Z$ 平面上及圆半径 $R=1$ 知:
 $C_y(u) \equiv 1; P_x(t) \equiv P_z(t); C_x^2(u) + C_z^2(u) \equiv 1$, 则有:
 $S(t, u) = [P_x(t) \ C_x(u), P_y(t), P_z(t) \ C_z(u)]$, 故
 $S_x^2(t, u) + S_z^2(t, u) = P_x^2(t) \ C_x^2(u) + P_z^2(t) \ C_z^2(u)$
 $= P_x^2(t) [C_x^2(u) + C_z^2(u)]$
即 $S_x^2(t, u) + S_z^2(t, u) = P_x^2(t)$
 $P_x(t)$ 是 $P(t)$ 在 XOY 平面上的投影, 上式表明, 曲面 $S(t, u)$ 上任一点的 $X、Z$ 分量平方和为定值 $P_x^2(t)$, 故 $S(t, u)$ 为一绕 Y 轴的回转曲面。
证毕。

2 回转曲面数学模型的建立

在式 (4) 中, 对于 $[V]$, 当给定草图曲线上 $m-2$ 个型值点列 $P_i'(i=2, 3, \dots, m-1)$ 时, 应将它看作 XOY 面上的投影, 并把它转化为 $X=Z$ 平面上的点列 P_i , 然后据 P_i 按式 (2) 反求 $[V]$, 其转换关系是:

$$\begin{cases} x = z = \sqrt{2} x' \\ y = y' \end{cases}$$

(5)

式中 $P(x, y, z)$ 是 $X=Z$ 平面上 $P(t)$ 上的点, $P'(x', y')$ 是 XOY 面上草图曲线 $P'(t)$ 上的点。

而 $[W]$ 则以产生圆 $C(u)$ 的正 n 边形顶点近似代替。当 n 足够大时, 所产生的 B 样条曲线圆的逼近程度可以满足精度要求 (如当 $n=12$ 时, 误差仅为 0.02%)。

设 $Y=1$ 平面上圆 $C(u)$ 半径 $R=1$, 正 n 边形顶点为 $W_j(j=1, 2, \dots, n)$, 如图2所示。过 $W_1、W_2、W_3$ 作平行四边形, 其对角线交于 $A, C(u)$ 交 AW_2 于 C 点, 根据 B 样条曲线几何性质, $AW_2=3CW_2$, 又知 $OW_2=OW_1$, 由于 $AW_2=OW_2-OA=OW_2-OW_1 \cdot \cos \alpha=OW_2(1-\cos \alpha), CW_2=OW_2-OC=OW_2-1$, 得 $OW_2(1-\cos \alpha)=3(OW_2-1)$, 故 $OW_2=3/(2+\cos \alpha)$, 注意到顶点 Y 坐标 $W_{jy} \equiv 1$, 故顶点三坐标为 $(OW_2 \cos(\alpha)), 1, OW_2 \sin(\alpha))$, 可表示为:

$$W_j = (\frac{3\cos(\alpha)}{2+\cos \alpha}, 1, \frac{3\sin(\alpha)}{2+\cos \alpha})$$

(6)

其中 $\alpha=2\pi/n, j=1, 2, \dots, n$ 。

由 (6) 式知, 生成 B 样条圆 $C(u)$ 的特征正多边形顶点由 $j、n$ 自动生成, 无须给定其顶点矢量。

对于 $C(u)$ 曲线, 当 n 比较大时, 可使参数 u 在区间 $0 \leq u \leq 1$ 中仅取某一定值即满足要求, 从而使式 (4) 得到简化, 且使 $C(u)$ 与参数 u 无关。我们约定取 $u=0$, 则有:

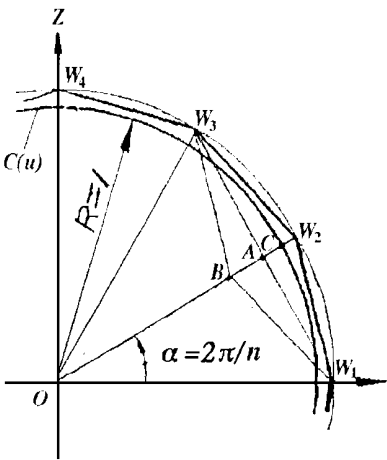


图2 圆的特征多边形顶点

$$[M]^T[U]^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^3 \\ 0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

代入 (4) 式, 则回转曲面模型可用下列分量矩阵形式表示:

$$S_{i,j}(t) = [T][M][V][W]^T[N]^T$$
$$i=2, 3, \dots, m-2; j=1, 2, \dots, n; 0 \leq t \leq 1$$

式中 $[T] = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]$;

$$[M] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$[V] = [V_{i-1} \ V_i \ V_{i+1} \ V_{i+2}]^T$, 分别用其三个坐标分量;

$[W] = [W_j \ W_{j+1} \ W_{j+2} \ W_{j+3}]$, 分别用其三个坐标分量(其中, 当 $j > n-3$ 时, $W_{n+1} = W_1, W_{n+2} = W_2, W_{n+3} = W_3$);

$$[N] = 1/6 [1 \ 4 \ 1 \ 0]。$$

3 回转曲面 CAD

回转曲面的设计应给定 XOY 面上草图曲线上点列 $P_i (i=2, 3, \dots, m-1)$, 然后按下述步骤进行:

- (1) 按式 (5) 将点列 P_i 变换为 $X=Z$ 平面上的点列 P_i ;
- (2) 按式 (2) 反求 B 特征多边形顶点矢量;
- (3) 按式 (7)、式 (6) 求回转曲面 $S(t)$ 上网格点坐标分量;
- (4) 对 $S(t)$ 进行轴测投影矩阵变换;
- (5) 在屏幕上显示彩色光照模型, 进行方案优化, 最后绘出回转曲面轴测图及其它有关图样。

在计算机上绘制的回转曲面网格轴测图如图3所示。图中隐藏线未作消去处理, 以了解曲面全貌。

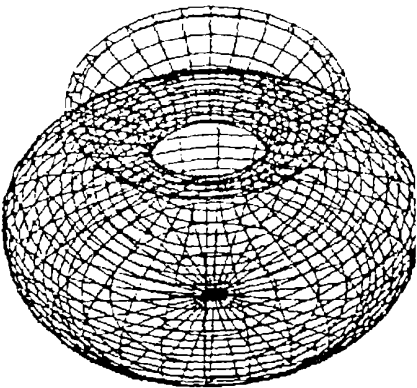


图3 回转曲面构造举例

参 考 文 献

1 孙家广等. 计算机图形学. 清华大学出版社. 1986
2 贾本立等. 计算机图学. 西北工业大学出版社. 1990
3 [日]山口富士夫. 用带显示装置的电子计算机设计自由曲面的一种方法. 南京航空学院译文资料. 1980

A Method for Constructing Surface of Revolution with B-Spline

QuWeishi Zhao Jianguo Qiu Yi
(Zhengzhou University of Technology)

Abstract The common bicubic B-spline surface is established by characteristic net consisting of $(m \times n)$ vertices. This paper introduces a method for constructing surface of revolution with B-spline. This method requires that only $(m-2)$ vertices be given on the curves (the generatrix of a surface) of the sketches. The paper derives its matrix representation, which has been verified by making graphs with computer. The method has several advantages: it requires less raw data; the operation is simple and takes computer less time; the surface is easy to be controlled, etc. Therefore, it has both theoretical significance and practical value in the fields of products modeling by CAD, optimization of programs in designing products, video technology and animation design of advertisements and so on.

Keywords Surface of Revolution; B-spline

(上接86页)

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n^2}{e^n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [2 - \frac{n}{\ln n}]$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = -\infty$, 由定理1可知所给的级数收敛。

以上三例题若用常见的柯西审敛法则无法判定它们的敛散性, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$ 都为1, 但用本文所给出的定理却能轻而易举地解决。

参 考 文 献

- 1 北京大学数学系·沈燮昌编·数学分析(2)·高等教育出版社
- 2 潘承洞·阶的估计·山东科学技术出版社

Test For Series of Nonnegative Terms

Cheng Lishe
(Zhengzhou University of Technology)

Abstract In this paper, a test for series of nonnegative terms is given, which is Summarized as common Cauchy test. some detailed conclusion is deduced from this test.

Keywords Series of nonnegative terms; test for convergence