第18卷 第3期 郑州工业大学学报 Vol.18 No.3.
1997年 9 月 Journal of Zhengzhou University of Technology Sep. 1997

Hamilton——Cayley 定理的推广

陈建梅
(郑州工业大学数力系)

摘 要 本文对 Hamilton——Cayley 关于零化多项式的定理进行了推广,并给出了 Hamilton——Cayley 定理的完整证明。

关键词 数字矩阵;多项式矩阵;行列式;零化多项式
中图分类号 O 151

定义 设 A 为 $n\times n$ 的数字矩阵,如果存在多项式 $\varphi(\lambda)$,使得 $\varphi(A)=O$,则称 $\varphi(\lambda)$ 为 A 的零化多项式。

定理(Hamilton——Cayley 定理的推广) 设

(1) A 为 $n\times n$ 的数字矩阵

(2) $h(\lambda)$ 是 λ 的多项式,且 $\deg[h(\lambda)]\leqslant n$

(3) $n\times n$ 的多项式矩阵 $B(\lambda)$ 的元素或为零多项式或为次数不超过 $n-1$ 的多项式,如果 $h(\lambda)E=(\lambda E-A)B(\lambda)$,则称 $h(\lambda)$ 为 A 的零化多项式,即 $h(A)=O$.

证明:由定理中的条件(2),可以设

$h(\lambda)=a_0\lambda+a_1\lambda^{-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$,其中:$a_0,a_1,\cdots\cdots,a_n$ 都是复数.

由定理中的条件(3),可以设

$B(\lambda)=B_1\lambda^{-1}+B_2\lambda^{-2}+\cdots\cdots B_{n-1}\lambda+B_n$,其中:$B_1,B_2,\cdots\cdots,B_n$ 都是 $n\times n$ 的数字矩阵.

则 $h(\lambda)E=a_0E\lambda+a_1E\lambda^{-1}+\cdots+a_{n-1}E\lambda+a_nE$

$(\lambda E-A)B(\lambda)=B_1\lambda+(B_2-AB_1)\lambda^{-1}+\cdots+(B_n-AB_{n-1})\lambda-AB_n$

故从 $h(\lambda)E=(\lambda E-A)B(\lambda)$ 可得

$$\begin{cases} a_0E=B_1 \\ a_1E=B_2-AB_1 \\ \vdots \\ a_{n-1}E=B_n-AB_{n-1} \\ a_nE=-AB_n \end{cases}$$

$$\text{则}\begin{cases} a_0A^n=A^nB_1 \\ a_1A^{n-1}=A^{n-1}(B_2-AB_1) \\ \vdots \\ a_{n-1}A=A(B_n-AB_{n-1}) \\ a_nE=-AB_n \end{cases}$$

收稿日期: 1997-01-13

从而有 $a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE=O$ 即 $h(A)=O$. 证毕

推论 设 A 为 $n\times n$ 的数字矩阵, $f(\lambda)=\det(\lambda E-A)$, 则 $f(A)=O$.

证明: 1). 当 $n=1$ 时, 可设 $A=(a_{11})_{1\times 1}$, 则 $f(\lambda)=\lambda-a_{11}$, $f(A)=A-a_{11}E=A-A=O$.

2). 当 $n>1$ 时, 因为 $f(\lambda)E=\det(\lambda E-A)\cdot E=(\lambda E-A)\operatorname{adj}(\lambda E-A)$, 而 $f(\lambda)$ 是 λ 的 n 次多项式。

$\operatorname{adj}(\lambda E-A)$ 是 $n\times n$ 的多项式矩阵, 且它的元素或是零多项式或是次数不超过 $n-1$ 的多项式。

所以 $f(A)=O$.

此推论就是[1]中的 Hamilton－－Cayley 定理。

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}, \text{求 } g(A)=A^7-15A^6+36A^5$$

解法一 $f(\lambda)=\det(\lambda E-A)$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-7&-4&1\\-4&\lambda-7&1\\4&4&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)^2(\lambda-12)$$

$$=\lambda^3-18\lambda^2+81\lambda-108$$

令 $g(\lambda)=\lambda^7-15\lambda^6+36\lambda^5$, 则

$$g(\lambda)=(\lambda^4+3\lambda^3+9\lambda^2+27\lambda+81)f(\lambda)+243\lambda^2-3645\lambda+8748$$

而 $f(A)=O$. (Haimlton－－Cayley 定理)

所以 $g(A)=243A^2-3645A+8748E$

$$=243\times\begin{pmatrix}69&60&-15\\60&69&-15\\-60&-60&24\end{pmatrix}-3645\times\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}+8748\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=O$$

解法二 令 $g(\lambda)=\lambda^7-15\lambda^6+36\lambda^5$ 则

$$g(\lambda)=\lambda^5(\lambda-3)(\lambda-12)$$

$$\text{而}(A-3E)(A-12E)=\begin{pmatrix}4&4&-1\\4&4&-1\\-4&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&4&-1\\4&-5&-1\\-4&-4&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

所以 $g(A)=A^5(A-3E)(A-12E)$

$$=A^5\times O$$

$$=O$$

例 2 设

$$B=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-7&-6&-1&0\end{pmatrix}$$

求 $g(B)=B^{10}-3B^9+3B^8-2B^7+2B^6-2B^4+2B^3-2B^2+5B-E$

解：$f(\lambda)=\det(\lambda E-B)$

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-1)^4$

$=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-4\lambda+1$

令　$g(\lambda)=\lambda^{10}-3\lambda^9+3\lambda^8-2\lambda^7+2\lambda^6-2\lambda^4+2\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda-1$　则

$g(\lambda)=(\lambda^6+\lambda^5+\lambda^4-\lambda^2-\lambda-1)f(\lambda)+\lambda^2+2\lambda$

而 $f(B)=O$（Hamilton－Cayley 定理）

所以 $g(B)=B^2+2B$

$$又\ B^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & 0 & 0 \\ 24 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$故\ g(B)=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & 0 & 0 \\ 24 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 & 0 \\ -16 & -5 & 0 & 0 \\ 38 & 4 & 7 & 4 \\ -18 & -14 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

参 考 文 献

1 丁学仁，蔡高厅编著．工程中的矩阵理论．天津大学出版社．1985年9月第一版

2 蒋正新，施国梁编著．矩阵理论及其应用．北京航空学院出版社．1988年3月第一版

3 卢树铭，郭敏学编著．矩阵理论及应用．辽宁科学技术出版社．1989年12月第一版

4 何旭初，孙文瑜编著．广义逆矩阵引论．江苏科学技术出版社．1991年第一版

5 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组编．高等代数．人民教育出版社．1978年第一版

The Generalization of Hamilton－Cayley′s Theorem

Chen　Jianmei

(*Zhenzhou University of Technology*)

Abstract　In this paper, we generalize Hamilton－－Cayley′s theorem about null－polynomial and give a full proof of Hamilton－Cayley′s theorem.

Keywords　Numerical matrix; polynomial matrix; determinant; null－polynomial