第18卷 第3期
1997年 9 月
郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technology
Vol.18 No.3.
Sep. 1997

正项级数的审敛法

成立社
(郑州工业大学数力系)

摘要 本文给出正项级数的一种审敛法，此审敛法可以概括常见的柯西审敛法。且由此方法还可以推出比柯西审剑法更为细致的结论。

关键词 正项级数；审敛法

中图分类号 O173

定理1 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=p$(或$\pm\infty$)，则当$-\infty\leqslant p<-1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$-1<p\leqslant+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证明：当$-\infty\leqslant p<-1$时，取p_0使得$p<p_0<-1$，则由极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=p$可知，必存在$N_1>1$，当$n>N_1$时，有$\frac{\ln u_n}{\ln n}\leqslant p_0<-1$，此时便有$\ln u_n\leqslant p_0\ln n=\ln n^{p_0}$，故$u_n\leqslant n^{p_0}=\frac{1}{n^{-p_0}}$，而$-p_0>1$，由P级数知$\sum\limits_{n=N_1}^{\infty}\frac{1}{n^{-p_0}}$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

当$-1<p\leqslant+\infty$时，取p_1使得$-1<p_1<p$由极限定义可知必存在$N_2>1$，当$n>N_2$时有$\frac{\ln u_n}{\ln n}\geqslant p_1>-1$，故$\ln u_n\geqslant p_1\ln n=\ln n^{p_1}$，从而有$u_n\geqslant n^{p_1}=\frac{1}{n^{-p_1}}$而又因$-p_1<1$，由P级数可知，级数$\sum\limits_{n=N_2}^{\infty}\frac{1}{n^{-p_1}}$发散，所以原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。证毕。

由定理1我们可以推得如下推论。

推论1 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}=p$ ($\alpha>0$)，则当$0\leqslant p<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$1<p\leqslant+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证明：因$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}=p$ ($\alpha>0$)（此处p为有限数)，可得$(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}=p+u(n)$，其中$\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=0$，故$\frac{1}{n^\alpha}\ln u_n=\ln[p+u(n)]$，于是$\frac{\ln u_n}{\ln n}=\frac{n^\alpha}{\ln n}\ln[p+u(n)]$ $(n>1)$。由此便得：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\ln n}\ln[p+u(n)]=\begin{cases}-\infty & (p<1)\\ +\infty & (p>1)\end{cases}$

若$p=+\infty$，则对于任意大的正数$M>1$，存在$N>1$，当$n>N$时有$(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}>M$，于是有$\frac{\ln u_n}{\ln n}>\frac{n^\alpha}{\ln n}\ln M$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=+\infty$。

若$p=0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}=0$ ($\alpha>0$) 可得$(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}=u(n)$，其中$\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=0$. 故$\frac{1}{n^\alpha}\ln u_n=\ln u(n)$，于是$\frac{\ln u_n}{\ln n}=\frac{n^\alpha}{\ln n}\ln u(n)$ $(n>1)$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\ln n}\ln u(n)=-\infty$.

收稿日期：1996－10－30

综上可知，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln U_n}{\ln n}=\begin{cases}-\infty & 0\leqslant p<1\\ +\infty & 1<p\leqslant+\infty\end{cases}$，由定理1即知推论1成立。证毕。

特别当 $\alpha=1$ 时，推论1即成为我们常见的柯西审敛法。不妨记作推论2。

推论2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ 是正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p$，则当 $0\leqslant p<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $1<p\leqslant+\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

由此可见定理1概括了常见的柯西审敛法以及推广后的柯西审敛法。

下面由定理1还可推出一个更为细致的审敛法。

定理2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}\right]\frac{n^\beta}{\ln n}=p$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$ 则有

(1) 若 $\alpha>\beta$，则 $0<p\leqslant+\infty$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；$-\infty\leqslant p<0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

(2) 若 $\alpha=\beta$，则 $1<p\leqslant+\infty$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；$-\infty\leqslant p<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

(3) 若 $\alpha<\beta$，则对于任意有限常数 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 都发散。

证明：设 p 为有限常数，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}\right]\frac{n^\beta}{\ln n}=P$ 可得 $\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}\right]\frac{n^\beta}{\ln n}=p+V_{(n)}$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=0$。整理后可得 $\frac{\ln u_n}{n^\alpha}=\ln\left[1-\frac{\ln n}{n^\beta}(p+V(n))\right]$，注意当 n 充分大时有 $\left|\frac{\ln n}{n^\beta}(p+V(n))\right|<1$（这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\beta}(p+V(n))=0$）。故当 n 充分大时有 $\frac{\ln u_n}{n^\alpha}=-\frac{\ln n}{n^\beta}(p+V(n))+0\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right)$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{-n^{\alpha-\beta}\left[(p+V(n))-\frac{0\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right)}{\frac{\ln n}{n^\beta}}\right]\right\}$

$$=\begin{cases}-\infty & (\alpha>\beta\ \ p>0)\\ +\infty & (\alpha>\beta\ \ p<0)\\ -p<-1 & (\alpha=\beta\ \ p>1)\\ -p>-1 & (\alpha=\beta\ \ p<1)\\ 0 & (\alpha<\beta\ \ p\text{ 有限})\end{cases}$$

由定理1可知，当 p 为有限数时结论成立。

对于 p 为无限时，分二种情况证明。

(1) 对于 $\alpha>\beta$。若 $p=+\infty$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}\right]\frac{n^\beta}{\ln n}=+\infty$ 得，对于任意大的正数 M，总存在 $N>1$，当 $n>N$ 时，有 $\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}\right]\frac{n^\beta}{\ln n}>M$ 成立，整理后得 $\frac{\ln u_n}{\ln n}<\frac{n^\alpha}{\ln n}\ln\left(1-\frac{\ln n}{n^\beta}M\right)=\frac{n^\alpha}{\ln n}\left[-\frac{\ln n}{n^\beta}M+0\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right)\right]=-n^{\alpha-\beta}\left[M-\frac{0\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right)}{\frac{\ln n}{n^\beta}}\right]\to-\infty$（当 $n\to\infty$），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=-\infty$。

若 $p=-\infty$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}\right]\frac{n^\beta}{\ln n}=-\infty$ 得，对于任意大的正数 M，总存在 $N>1$，当 $n>N$ 时有 $\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^\alpha}}\right]\frac{n^\beta}{\ln n}<-M$ 成立，整理可得 $\frac{\ln u_n}{\ln n}>\frac{n^\alpha}{\ln n}\ln\left(1+\frac{\ln n}{n^\beta}M\right)=\frac{n^\alpha}{\ln n}$

$\left[\frac{\ln n}{n^{\beta}}M+o\left(\frac{\ln n}{n^{\beta}}\right)\right]=n^{\alpha-\beta}\left[M+\frac{o\left(\frac{\ln n}{n^{\beta}}\right)}{\frac{\ln n}{n^{\beta}}}\right]\to+\infty$（当 $n\to\infty$），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=+\infty$。

（2）对于 $\alpha=\beta$。若 $p=+\infty$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^{\alpha}}}\right]\frac{n^{\beta}}{\ln n}=p=+\infty$，由无穷大的定义可得，对于任意大的正数 M（不妨设 $M>1$），总存在 $N>1$，当 $n>N$ 时有 $\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^{\alpha}}}\right]\frac{n^{\beta}}{\ln n}>M$ 成立，整理后得 $\frac{\ln u_n}{\ln n}<\frac{n^{\alpha}}{\ln n}\ln\left(1-\frac{\ln n}{n^{\beta}}M\right)=\frac{n^{\alpha}}{\ln n}\left[-\frac{\ln n}{n^{\beta}}M+o\left(\frac{\ln n}{n^{\beta}}\right)\right]=-n^{\alpha-\beta}\left[M-\frac{o\left(\frac{\ln n}{n^{\beta}}\right)}{\frac{\ln n}{n^{\beta}}}\right]$。由于 $\alpha=\beta$，故 $\frac{\ln u_n}{\ln n}<-\left[M-\frac{o\left(\frac{\ln n}{n^{\beta}}\right)}{\frac{\ln n}{n^{\beta}}}\right]\to-M$（当 $n\to\infty$），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}\leqslant-M<-1$。

若 $p=-\infty$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^{\alpha}}}\right]\frac{n^{\beta}}{\ln n}=p=-\infty$，由无穷大的定义可知，对于任意大的正数 M（不妨设 $M>1$），总存在 $N>1$，当 $n>N$ 时有 $\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n^{\alpha}}}\right]\frac{n^{\beta}}{\ln n}<-M$ 成立。整理后得 $\frac{\ln u_n}{\ln n}>\frac{n^{\alpha}}{\ln n}\ln\left(1+\frac{\ln n}{n^{\beta}}M\right)=n^{\alpha-\beta}\left[M+\frac{o\left(\frac{\ln n}{n^{\beta}}\right)}{\frac{\ln n}{n^{\beta}}}\right]$。由于 $\alpha=\beta$，故可知 $\frac{\ln u_n}{\ln n}>\left[M+\frac{o\left(\frac{\ln n}{n^{\beta}}\right)}{\frac{\ln n}{n^{\beta}}}\right]\to M$（当 $n\to\infty$），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}>1>-1$。

综上所述，当 p 为无限时根据定理1知结论成立。证毕。

当 $\alpha=\beta=1$ 时可得如下推论

推论 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(u_n)^{\frac{1}{n}}\right]\frac{n}{\ln n}=p$，则当 $P>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $p<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

举例：考查下列级数的敛散性

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-\sqrt{n+1}}\left(1+\sin\frac{1}{2n}\right)^{\sqrt{n^{3}}}$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{\pi\ln n}{4n}\right)^{n}$

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{e^{\sqrt{n}}}$

解：（1）取 $\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\left(1+\sin\frac{1}{2n}\right)^{n}=\frac{\sqrt{e}}{2}<1$，由推论1知所给的级数收敛。

（2）因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{\pi\ln n}{4n}\right)^{n\cdot\frac{1}{n}}\right]\frac{n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)\frac{n}{\ln n}+\frac{\pi}{4}\right]$，又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)\frac{n}{\ln n}=0$，从而上式的极限值为 $\frac{\pi}{4}<1$，由定理2的推论可知所给的级数发散。（**下转97页**）

A Method for Constructing Surface of Revolution with B－Spline

QuWeishi　Zhao Jianguo　Qiu Yi
(*Zhengzhou University of Technology*)

Abstract　The common bicubic B－spline surface is established by characteristic net consisting of $(m\times n)$ vertices. This paper introduces a method for constructing surface of revolution with B－spline. This method requires that only $(m-2)$ vertices be given on the curves (the generatrix of a surface) of the sketches. The paper derives its matrix representation, which has been verified by making graphs with computer. The method has several advantages: it requires less raw data; the operation is simple and takes computer less time; the surface is easy to be controlled, etc. Therefore, it has both theoretical significance and practical value in the fields of products modeling by CAD, optimization of programs in designing products, video technology and animation design of advertisements and so on.

Keywords　Surface of Revolution; B－spline

(上接86页)

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2-\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right]$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}=+\infty$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln n}=-\infty$，由定理1可知所给的级数收敛。

以上三例题若用常见的柯西审敛法则无法判定它们的敛散性，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ 都为1，但用本文所给出的定理却能轻而易举地解决。

参 考 文 献

1　北京大学数学系．沈燮昌编．数学分析(2)．高等教育出版社
2　潘承洞．阶的估计．山东科学技术出版社

Test For Series of Nonnegative Terms

Cheng Lishe
(*Zhengzhou University of Technology*)

Abstract　In this paper, a test for series of nonnegative terms is given, which is Summarized as common Cauchy test. some detailed conclusion is deduced from this test.

Keywords　Series of nonnegative terms; test for convergence