

钢筋混凝土板式悬挑楼梯的内力计算

杨卫忠

陈士霞

(郑州工业大学土建系)

(郑州铁路分局设计所)

摘 要 本文利用力法, 导出了钢筋混凝土板式悬挑楼梯的内力计算公式, 并提出简化计算方法, 该法具有力学概念明确、计算简单等优点。

关键词 悬挑楼梯; 计算方法; 钢筋混凝土结构

中图分类号 TU 311

引言

钢筋混凝土板式悬挑楼梯 (简称悬梯) 是一种造型新颖、美观而具有独特艺术效果的新型结构, 悬梯的梯段与休息平台互为支承而形成空间刚架 (见图 1a), 因而是一种多次超静定的空间结构, 其内力分析繁琐而复杂。本文运用结构力学的力法原理, 得到其内力求解公式, 并提出简化计算方法, 与现有计算方法相比较, 该法具有力学概念明确, 计算简便, 其结果与其它计算方法的结果吻合较好。

1 用力法求解悬梯内力

采用力法求解悬梯内力时, 由于梯段与平台板的协同作用, 平台板与梯段连接的折缝方向的变形可忽略, 同时, 把平台板平面内视为没有变形的刚性区域, 由此建立图 1a 中悬梯的计算简图 (图中粗线部分), 坐标如图 1b。由对称性原理知, 在平台板的对称轴上仅存在二个赘余力, 即水平剪力 x_1 和挠曲弯矩 x_2 , 求解 x_1 和 x_2 时只须计算一个梯段, 其变形协调方程为

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

式 (1) 中的主副变位和自由项应用图乘法由式 (3) 求得。求解时仅考虑弯矩和扭矩的影响而忽略轴力和剪力的影响。

$$\delta_j = \int \overline{M}_{ix} M_{jx} / EI_x) dz + \int \overline{M}_{iy} M_{jy} / EI_y) dz + \int \overline{M}_{iz} M_{jz} / GI_\theta) dz \quad (2)$$

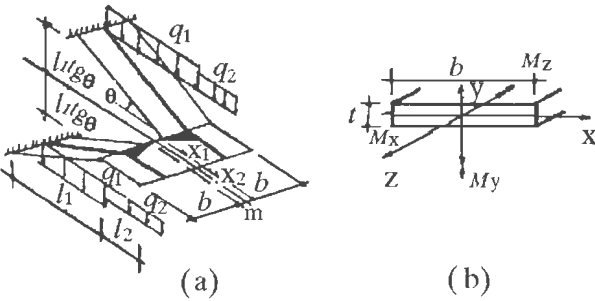


图 1 悬梯的计算简图及坐标

图 1 悬梯的计算简图及坐标

令 $b/t=k$, b —— 长边, t —— 短边, 则 $EI_x = Ekt^4/12$, $EI_y = Ek^3t^4/12$, $GI \rho = \gamma kt^4G$ 。
对钢筋混凝土结构, $G = 0.4E$, $\gamma = \frac{1}{3}$ (1—0.63/k), 取截面的相对刚度 $EI_x = 1$, 则有 $EI_y = k^2$, $GI \rho = 4.8\gamma$ 。

由图 2 用式 (3) 求出主副变位和自由项并整理有

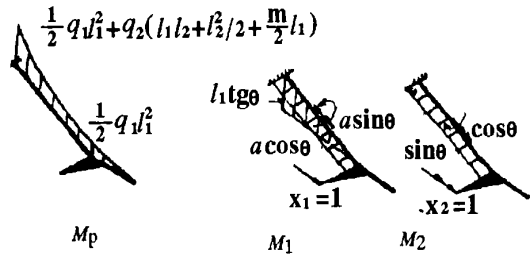


图 2 主副变位和自由项相关图

$$\begin{cases} \delta_{11} = \frac{1}{3}l_1^3 \operatorname{tg}^2 \theta + \frac{a^2 l_1}{k^2} \cos^2 \theta + \frac{a^2 l_1}{4.8\gamma} \sin^2 \theta \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \left(\frac{al_1}{k^2} - \frac{al_1}{4.8\gamma} \right) \sin \theta \cos \theta \\ \delta_{22} = \frac{l_1 \sin^2 \theta}{k^2} - \frac{l_1}{4.8\gamma} \cos^2 \theta \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta_p = -\frac{1}{8}ql_1^4 \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{12}ql_1^2 l_2 (4_1 + 3_2) \operatorname{tg} \theta \\ \quad - \frac{1}{6}qml_1^3 \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2}qma' \delta_{12} \\ \Delta_q = \frac{1}{2}qma' \delta_{22} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $a = \frac{1}{2}(b+m)$, $a' = \frac{b}{2} + \frac{1}{4}m$, m —— 梯段之间隙。

将式 (3)、(4) 代入式 (1) 可解得 x_1 、 x_2 , 并整理得:

$$\begin{cases} x_1 = \left[\frac{3}{8}ql_1 + q l_2 \left(1 + \frac{3_2}{4_1} \right) + \frac{1}{2}q m \right] \operatorname{ctg} \theta (1 - \alpha) \\ x_2 = \left[\frac{3}{8}ql_1 + q l_2 \left(1 + \frac{3_2}{4_1} \right) + \frac{1}{2}q m \right] (1 - \alpha - \beta) a - \frac{1}{2}qma' \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$\alpha = \frac{3(a/l_1)^2}{3(a/l_1)^2 + (4.8\gamma \sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta) \operatorname{tg}^2 \theta}$$

$$\beta = \frac{4.8\gamma \operatorname{tg}^2 \theta}{3(a/l_1)^2 + (4.8\gamma \sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta) \operatorname{tg}^2 \theta}$$

考虑活载不利布置后, 由式 (5) 利用空间刚架的六个平衡条件即可求出任意截面的内力。

2 简化计算方法

分析式 (5) 不难发现, α 、 β 即是由于梯段的弯曲变形和扭转变形所引起的附加内力系数, 同时, 对常用楼梯, $b/t \geq 6$, θ 一般在 26° 左右, α 、 β 可进一步简化为

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3(a/l_1)^2}{k^2 \sin^2 \theta} = \frac{3(b+m)^2 t^2}{4b^2 l^2 \sin^2 \theta} \\ \beta = \frac{4.8\gamma}{k^2 \cos^2 \theta} = \frac{(1.6 - t/b)t^2}{b^2 \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (6)$$

求解悬梯任意截面内力可按下述方法计算，由对称性原理知，可取一个梯段为研究对象。

2.1 在梯段和平台交接处加一弹性支座，以考虑另一梯段对其的空间作用，空间作用系数为 $1-\alpha$ 如图 3 所示，可求得梯段 s 方向弯矩及支反力。

$$\bar{R}_B = \frac{3}{8}ql_1 + ql_2(1 + \frac{3}{4}) + \frac{1}{2}qm \quad (7a)$$

$$R_B = \bar{R}_B(1 - \alpha) \quad (7b)$$

$$M_x = R_B \cdot s - \frac{1}{2}qs^2 - \frac{1}{2}ql_2^2 - q(l_2 + \frac{m}{2}) \cdot s \quad (8)$$

当 $s = 0, M_B = -\frac{1}{2}ql_2^2$

$$s = \frac{l_1}{2}, M = \frac{1}{16}ql_1^2 - \frac{1}{8}ql_2^2 - \frac{1}{4}qml_1 - \frac{1}{2}\bar{\alpha}R_B \cdot l_1 \quad (8a)$$

$$s = l_1, M_A = -\frac{1}{8}ql_1^2 + \frac{1}{4}ql_2^2 - \frac{1}{2}qml_1 - \bar{\alpha}R_B l_1 \quad (8b)$$

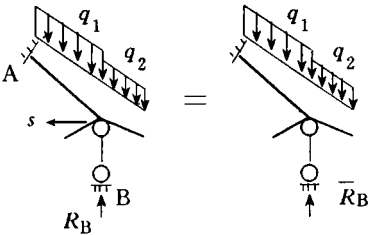


图 3 空间作用系统相关图

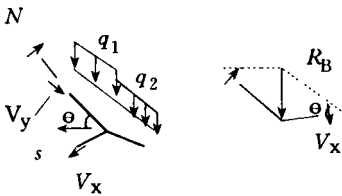


图 4 R_B 、 V_x 、 V_y 和 N 示意图

2.2 由于支座 B 并不存在，以支反力 R_B 反向作用求平台水平剪力 V_x ，并按平衡条件求梯段剪力 V_y 和轴力 N （见图 4）。

平台板：

$$V_x = R_B \cdot \text{ctg } \theta, N = 0, V_y = 0 \quad (9)$$

梯段板：

$$\begin{cases} N = R_B \cdot \cos^2 \theta \sin \theta + (ql_2 + q\frac{l_1}{2} + \frac{1}{2}qm) \sin \theta \\ V_y = R_B \cdot \cos \theta - (ql_2 + q\frac{l_1}{2} + \frac{1}{2}qm) \cos \theta \\ V_x = 0 \end{cases} \quad (10)$$

2.3 以支座 B 反力 R_B 反向作用求平台板对称截面上弯矩 M_x （见图 5），并考虑梯段的附加内力影响。则

$$\begin{cases} M_x = -R_B \cdot a - \frac{1}{8}qm^2 + \bar{R}_B \cdot a \\ M_z = M_y = 0 \end{cases} \quad (11)$$

2.4 以平台水平剪力 V_x 求梯段弯矩 M_y 和 M_z ，同样考虑梯段附加内力影响。梯段各截面

上 M_y 和 M_z 均相等。

$$M_y = R_B \cdot a/\sin \theta - \overline{\beta R_B} \cdot a \sin \theta$$
$$M_z = \overline{\beta R_B} \cdot a \cos \theta$$

(13)

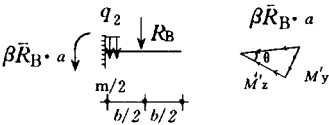


图 5 R_b 和 M_x 的关系图

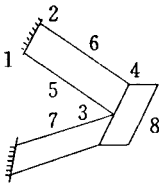


图 6 截面位置示意图

利用对称性即可得到另一梯段的内力。

3 算例

[例 1] 选自文献 [2] 例 8- 1, 基本参数如下: $l_1=3\text{m}$, $l_2=1.5\text{m}$, $b=1.5\text{m}$, $t=0.15\text{m}$, $m=0.2\text{m}$, $\theta=26.565^\circ(\text{tg}\theta=\frac{1}{2})$, 梯段: $g_1=1\text{kN/m}$, $q_1=4.4\text{kN/m}$; 平台: $g_2=1\text{kN/m}$, $q_2=4.4\text{kN/m}$ 。现考虑二种情况, 工况 I : 梯段满载 (g_1+q_1) 而平台仅考虑恒载 (g_2); 工况 II : 梯段满载 (g_1+q_1) 而平台也满载 (g_2+q_2), 各截面位置示意图 6 其内力列于表中。

表 1 各截面内力值

控制截面	平 台		梯 段			
	3- 4	7- 8	1- 2		5- 6	
M_x	本文	- 16 29	- 42 43	- 15 37 (- 17. 51)	5 77 (7. 21)	
	文 [2]	- 16 29	- 38 63	- 15 80 (- 17. 91)	6 14 (7. 51)	
	文 [3]	- 17. 38	- 28 22	- 19. 37 (- 20. 85)	3 23 (5. 17)	
M_y	本文			- 98 98 (- 80. 69)	- 98 98 (- 80. 69)	
	文 [2]			- 95 57 (- 78. 38)	- 95 57 (- 78. 38)	
	文 [3]			- 109 16 (- 86. 8)	- 109 16 (- 86. 8)	
M_z	本文			0 75 (0. 61)	0 75 (0. 61)	
	文 [2]			4 58 (3. 76)	4 58 (3. 76)	
	文 [3]			4 77 (1. 73)	4 77 (1. 73)	
N	本文			129 64 (109. 31)	116 75 (96. 43)	
	文 [2]			127 59 (108. 09)	114 71 (95. 13)	
	文 [3]			127 25 (107. 33)	114 37 (94. 45)	
V_y	本文			- 25 48 (- 27. 63)	0 28 (- 1. 87)	
	文 [2]			- 24 91 (- 27. 17)	0 85 (- 1. 41)	
	文 [3]			- 25 06 (- 27. 5)	0 70 (- 1. 74)	

注: (1) 文 [2] 表示按文献 [2] 中板相互作用法的计算结果, 而文 [3] 则表示按文献 [3] 中的空间构架法的计算结果。

(2) 表中圆括员内的数字是工况 I 的结果, 其余为工况 II 的结果。

从表 可以看出, 除梯段扭矩误差较大外, 其余内力均符合较好。扭矩误差稍大的原因

是本文忽略了平台板的变形,而文献 [2]、[3] 则考虑了平台板的变形。但是,梯段板和平台板都承受复杂内力,属于双向弯、剪、扭、压 (拉) 构件,目前尚无精确的设计方法,一般采用部分分开单独考虑,部分考虑相关作用。经大量对比计算,若满足下列构造要求: $t \geq (\frac{1}{20} \sim \frac{1}{25}) l_1$, 则剪力和扭矩的影响一般很小,可按有关钢筋混凝土结构的构造要求配置钢筋,从而忽略扭矩的影响。

参 考 文 献

1 龙驭球,包世华主编. 结构力学. 高等教育出版社. 1985年
2 周起敬等编著. 混凝土结构构造手册. 中国建筑工业出版社. 1994年
3 黄存汉等编著. 建筑结构设计综合手册. 河南科学技术出版社. 1991年

Calculation of Internal Forces in R· C Cantilevered Steps

Yang Weizhong
(Zhengzhou University of Technology)
Chen Shixia
(Zhengzhou Railway Sub bureau)

Abstract In this paper, by using of force method, Formulas of internal forces in R· C Cantilevered steps are deduced and a simplified calculation method is put forward. This method has many merits such as clear mechanics concept, simple calculation etc.
Keywords cantilevered steps; calculation method; reinforced concrete structure.