

钢筋砼双向叠合板抗剪强度的 极 限 分 析

杨建水

(郑州工业大学水环系)

摘 要 通过对 8 块无结合筋双向叠合板的试验研究, 本文采用组合周界错动机构, 锥面母线为直线与曲线的连线, 按塑性极限分析的方法推导了抗剪强度计算公式。该公式与试验结果符合性良好。

关键词 叠合板; 抗剪; 塑性分析

中图分类号 TU 375.2

钢筋砼双向叠合板具有整体性能好, 节省模板, 便于施工等优点, 在港工、水工、桥梁及工业民用结构中广泛采用。这种四边支承叠合板在集中荷载作用下的剪切破坏形式与整浇板一样, 为冲切破坏。但是其破坏锥面却有自己的特点。本文根据试验结果, 按塑性极限分析方法推导其抗剪强度公式。

1 材料本构关系和屈服准则

取钢筋和砼均为理想刚塑性材料, 其应力应变关系如图 1, 图中 v 为折减系数, 其值小于 1。

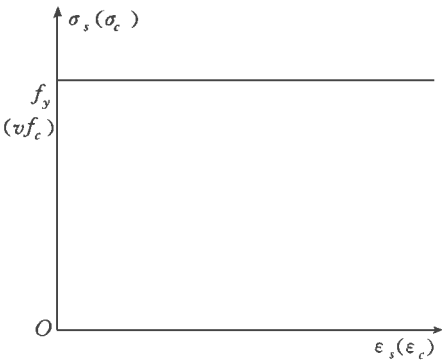


图 1 钢筋的本构关系

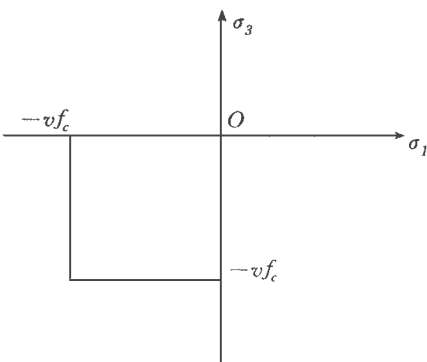


图 2 砼的屈服准则

钢筋屈服条件为

$$\sigma = f_y \quad (1)$$

在平面应力状态下砼的屈服准则采用修正的库伦准则, 如图 2。

$$\sigma = 0 \quad (2a)$$

$$\sigma = -v f_c \quad (2b)$$

式中 σ 、 ϵ ——钢筋应力与应变; σ 、 ϵ ——砼应力与应变; f_c ——砼抗压强度; f_y ——钢筋

屈服强度； σ 、 σ ——最大、最小主应力。

2 破坏机构

双向板的冲切破坏表现为环绕加力集载面的截锥体相对其余板域冲出，破坏时板域尚未广泛屈服，外域Ⅱ仍约束着内域Ⅰ的变形，相对位移主要沿板厚方向发生，忽略板的侧向变位，环向纤维将不发生压缩，这种机构称错动机构。参看图 3 (a)。

以往采取错动机构进行塑性分析中，大多只考虑圆形集中荷载，对于方形集中荷载下破坏周界模型，可将方形集中荷载下的破坏面描述为组合周界错动机构，如图 3 (b)。破坏面由 $r = r(z)$ 沿加载垫板周边为流动准线回转而成。这样，该问题可按轴对称问题考虑。

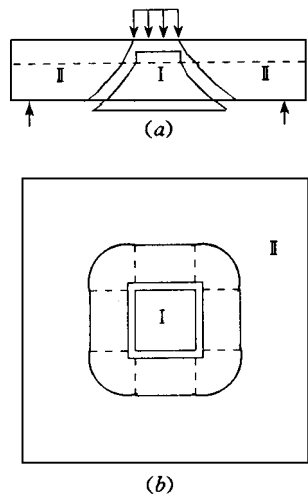


图 3 组合周界错动机构

3 塑性功

3.1 基本假设

- 3.1.1 假设板体在集中荷载作用下沿破坏锥面形成屈服面，将板体分为Ⅰ、Ⅱ两部分刚体，二者产生相对位移 u ，板体内部变形集中出现在塑性锥面上。
- 3.1.2 钢筋未屈服，根据刚塑性假定，忽略其所作的内功。
- 3.1.3 叠合面未产生相对滑移，但砼屈服面的母线在叠合面以上近似取为 45° 倾角的斜直线，叠合面以下为曲线。
- 3.1.4 板体不产生水平位移， $\epsilon = \epsilon_0 = 0$

3.2 塑性功计算

塑性区任一点的应变状态如图 4

$$\epsilon = \frac{u}{\delta}, \quad \epsilon = 0, \quad \epsilon_0 = 0$$

其中 u 为破坏锥体垂直位移， δ 为塑性区厚度

正应变率为
$$\epsilon = \epsilon_{sin \alpha} + \epsilon_{cos \alpha} = \frac{u}{\delta} sin \alpha$$
$$\epsilon = 0$$

剪应变率为
$$\gamma_m = \epsilon_{cos \alpha} - \epsilon_{sin \alpha} = \frac{u}{\delta} cos \alpha$$

主应变率为

$$\epsilon = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$$
$$\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_m}{2} \right)^2 = \frac{u}{2\delta} (sin \alpha \pm 1)$$

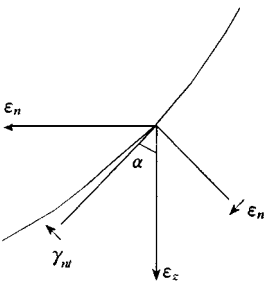


图 4 塑性区任一点的应变状态

根据屈服准则和基本假设，得塑性功 (内功) D 为：

$$D = \int_A (\sigma \epsilon_1 + \sigma \epsilon_2 + \sigma \epsilon_3) \delta l A = \int_A \frac{u}{2} v f_c (1 - sin \alpha) dA \tag{4}$$

4 塑性解

根据基本假设, 冲切锥面母线方程 $r=r(z)$ 可简化为: 第一段 OA 为直线段, 倾角为 $\Phi=45^\circ$; 第二段 AB 为曲线段, 见图 5。

由图可得 $dA = (2\pi + 4c) dz / \cos \alpha$

塑性内功可分为两部分, 第一部分在迭合面以上为 D_I , 第二部分在迭合面以下为 D_{II} 。

$$D_I = \int_{h_2}^{h_0} \frac{\mu}{2} v f_{\omega} [1 - \sin \alpha] \cdot (2\pi + 4c) dz / \cos \alpha$$
$$= \frac{\mu}{2} v f_{\omega} \int_{h_2}^{h_0} [1 - \sin \alpha] \cdot (2\pi \cdot z \tan \alpha + 4c) \cdot dz / \cos \alpha$$
$$= \frac{\mu}{2} v f_{\omega} h_2 \frac{1 - \sin \Phi}{\cos \Phi} \cdot \frac{\pi h_2 \sin \Phi + 4c \cos \Phi}{\cos \Phi} \tag{5}$$

$$D_{II} = \int_{h_2}^{h_0} \frac{\mu}{2} v f_{\omega} [1 - \sin \alpha] (2\pi + 4c) dz / \cos \alpha$$
$$= \pi v f_{\omega} \int_{h_2}^{h_0} \left[\frac{1}{\cos \alpha} \alpha' (r + \frac{2c}{\pi}) dz \right. \tag{6}$$

取 $r' = \tan \alpha$ 代入 (6) 即得

$$D_{II} = \pi v f_{\omega} \int_{h_2}^{h_0} [\sqrt{1 + (r')^2} - r'] (r + \frac{2c}{\pi}) dz$$

$$\text{令 } F(r, r') = (\sqrt{1 + (r')^2} - r') (r + \frac{2c}{\pi})$$

D_{II} 是由 $r=r(z)$ 所确定的泛函, 现求 D_{II} 的极值。

D_{II} 的 Euler 方程 $F - r' F_{r'} = C_1$

即有

$$(\sqrt{1 + (r')^2} - r') (r + \frac{2c}{\pi}) - r' (\frac{r'}{\sqrt{1 + (r')^2}} - 1) (r + \frac{2c}{\pi}) = C_1$$

其通解为:

$$r = a \cosh \frac{Z}{C_1} + b \sinh \frac{Z}{C_1} - \frac{2c}{\pi}$$
$$C_1 = \frac{a^2 - b^2}{2}$$
 \tag{7}

由边界条件:

$$z = h_2, r = h_2 \tan \Phi; \tag{8a}$$

$$z = h_2, r' = \tan \Phi; \tag{8b}$$

可确定 $a、b、c$ 值为:

$$a = \frac{S}{2} [(1 + \sin \Phi) e^{-\frac{h_2}{S \cos \frac{\Phi}{2}}} + (1 - \sin \Phi) e^{\frac{h_2}{S \cos \frac{\Phi}{2}}}] \tag{9a}$$

$$b = \frac{S}{2} [(1 + \sin \Phi) e^{-\frac{h_2}{S \cos \frac{\Phi}{2}}} - (1 - \sin \Phi) e^{\frac{h_2}{S \cos \frac{\Phi}{2}}}] \tag{9b}$$

$$C_1 = S \cos \Phi \tag{9c}$$

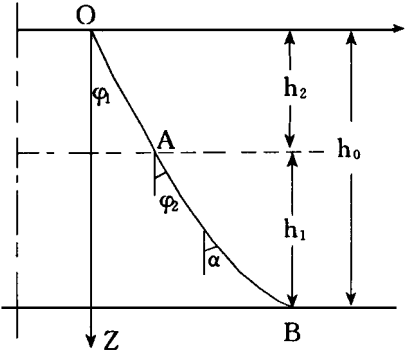


图 5 冲切锥面母线

故可得：

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \pi v f_{cl} \int_{h_2}^{h_0} [1 + (r')^2 - r](r + \frac{2c}{\pi}) dz \\ &= \pi v f_{cl} \{ \frac{1}{4}(a^2 + b^2)(sh \frac{2h_0}{C_1} - sh \frac{2h_2}{C_1}) \\ &\quad + ab(sh^2 \frac{h_0}{C_1} - sh^2 \frac{h_2}{C_1}) + \frac{1}{2}C_2(h_0 - h_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}[(ach \frac{h_0}{C_1} + bsh \frac{h_0}{C_1})^2 - (ach \frac{h_2}{C_1} + bsh \frac{h_2}{C_1})^2] \end{aligned} \tag{10}$$

虚功方程为：

$$V_u \cdot u = D_{\perp} + D_{\parallel} \tag{11}$$

由试验分析得： $\Phi=45^{\circ}$ ， $\Phi=45^{\circ}$ ，并选用 $v=0.8^{[2][3]}$ 。

将式 (5) 的 D_{\perp} 和式 (10) 的 D_{\parallel} 代入式 (11)，并将有关参数 a 、 b 、 C_1 及 Φ 、 Φ 、 v 代入整理，可得：

$$\begin{aligned} V_u &= 0.17f_{cl}h_2(4c + \pi h_2) + 0.63f_{cl}[2c(h_0 - h_2) \\ &\quad + 0.0087(2c + \pi h_2)^2(1 - e^{-\frac{2}{h_2 + \frac{2c}{\pi}}(h_0 - h_2)})] \end{aligned} \tag{12}$$

在式 (12) 中，中括号内的二项相差较大，后项不到前项的 9%，略去后项，则式 (12) 可简化如下：

$$V_u = 0.17f_{cl}h_2(4c + \pi h_2) + 1.26f_{cl}h_0c \tag{13}$$

取 $f_{cl}=0.67f_{cu1}$ ， $f_{cl}=0.67f_{cu2}$ ，代入式 (13) 则有：

$$V_u = 0.11f_{cu2}h_2(4c + \pi h_2) + 0.84f_{cu1}h_0c \tag{14}$$

式 (14) 即为叠合双向板抗剪强度的计算公式，该公式与试验值对比见表 1^[1]， V_u^o/V_u 的均值为 1.05，标准差为 0.12，可见本文提出的公式与试验符合性良好。

表 1 试验板 V_u^o/V_u 计算表

序号	板 号	V_u^o (KN)	V_u (KN)	V_u^o/V_u
1	CSB-L1500-A ₁	344.2	332.0	1.04
2	CSB-L1500-A ₂	304.6	308.6	0.99
3	CSB-L1500-A ₁	290.3	228.6	1.27
4	CSB-L1500-A ₂	284.2	225.5	1.26
5	CSB-L1500-A ₃	217.9	235.4	0.93
6	CSB-L1500-A ₁	269.1	296.1	0.91
7	CSB-L1500-A ₂	313.9	304.9	1.03
8	CSB-L1500-A ₃	303.8	319.8	0.95
均 值				1.05
标 准 差				0.12

注：1、 V_u^o 、 V/u 分别为抗剪强度试验值与计算值；

2、集中荷载的加载面积为 $150 \times 150 \text{mm}^2$ 。

5 结语

本文通过塑性极限分析方法推导出了钢筋砼叠合板在集中荷载下的塑性解公式，该公式与试验值符合良好，从而为分析叠合双向板的受剪机理提供了理论依据。但是对于非对称的情况仍需进一步探讨。

参 考 文 献

1 杨建水，丁自强．钢筋砼四边简支叠合板抗剪性能试验研究．砼基本理论及工程应用第三届学术讨论会论文集．1993．10

2 郑作樵，欧阳成生．钢筋砼园板的冲切强度．建筑结构学报．1985．6

3 陆勤，蒋永生，丁大钧．按塑性理论计算矩形截面钢筋砼简支梁的抗剪强度．南京工学院学报．1988．1

4 M·P·Nielson·Limit Analysis and Concrete Plasticity·Prentice Hall·Inc·Englewood Cliffs·New Jersey·1984

5 S·Timoshenko·s·Woinowsky-Krieger·Theory of Plates and shells

Limit Analysis of Shearing Strength for
Two-Way R·C· Laminated Slabs

Yang Jianshui
(Zhengzhou University of Technology)

Abstract By experimental study on ⁸ two-way composite slabs without binding reinforcement, a method in which a staggered mechanism for combined periphery is adoped and the conical element is a conneceting line of a line and a curve is proposed. Also, a calculating formula for shearing strength is derived according to the theorem of plastic limit analysis, and this formula is in good agreement with the test results.

Keywords laminated slabs; shear-resistant; plastic analysis.