第 18卷 第 1期
1997年 3 月
郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technology
Vo 1.18 No .1.
Mar . 1997

齿轮－转子－轴承系统弯扭耦合振动的新模型

夏伯乾* 虞 烈 谢友柏
(郑州工业大学机械系) (西安交通大学润滑理论与轴承研究所)

摘 要: 本文指出了目前文献中齿轮－转子－轴承系统弯扭耦合振动数学模型的不足，通过计入齿轮啮合线瞬时位置的变化对动态啮合力的影响，建立了新的弯扭耦合模型，在此基础上给出了系统弯扭耦合振动的振动方程组，更全面地描述了系统的振动特性。

关键词: 齿轮－转子－轴承系统 弯扭耦合振动 数学模型
中图分类号: TH 113

0 引言

图 1所示的齿轮－转子－轴承系统在压缩机、减速器等机器中广泛存在。这类转子系统，由于齿轮的作用，其动力学特性与单根转子－轴承系统或联轴器串联起来的多转子－轴承系统有着根本的不同，突出特征为系统的振动是弯扭耦合振动。【1】在研究压缩机中齿轮－转子系统时发现，测得的系统的特征频率只能由齿轮的弯扭耦合分析模型来验证。【2】在处理类似问题时发现，不稳定的弯曲振动伴随着扭转振动同时发生。虽然针对图 1所示的系统，有不少文章发表，但总的说来，对这类系统动力学性质的认识还是很不够的。随着现代工业的发展，齿轮传动的旋转机械越来越向高速度、大功率发展，系统的稳定性，振动、噪声等问题越来越突出。要解决这些问题，就需要对系统的动力学性质有深入的认识，从系统动力学的观点来确立分析设计的原则和方法。但是，我国目前齿轮－转子－轴承旋转机械行业，还都普遍采用的是各转子单独分析设计的方法，这样设计出来的产品自然存在不少问题。所以，研究齿轮－转子－轴承系统动力学，进而为工业实际提供可靠的分析方法和设计准则，显得十分重要和迫切。

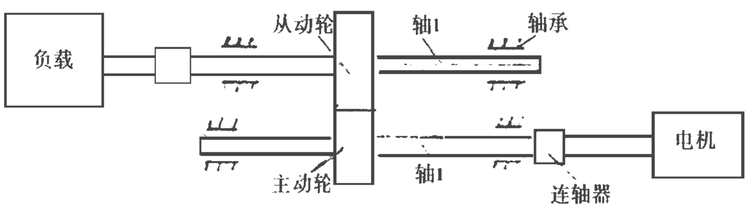

图 1

1 目前文献中常用的齿轮－转子－轴承系统弯扭耦合模型【3】【4】【5】

研究系统的动力学问题，建立合适的数学模型是第一步。图 1所示的平行轴系统，轴与轴之间是通过齿轮联系起来的，正是由于齿轮的作用，系统的振动才是弯扭耦合的。所以正确处理系统弯扭耦合关系是处理齿轮－转子－轴承系统弯扭耦合振动问题的关键。

收稿日期: 1996－04－17

*现在西安交大读博士

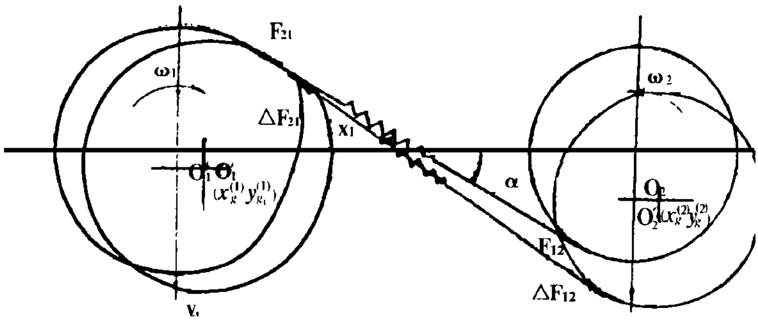

图 2

图 2是目前文献中处理齿轮－转子－轴承系统弯扭耦合振动最常用的模型简图。将齿轮本体视为刚体，轮齿的弹性和齿间阻尼简化为一对弹簧阻尼元件。假定（1）：齿轮工作过程中不脱啮，始终保持接触。（2）：啮合线方向保持不变。那么，在小扰动下，我们可以自然地得到沿啮合线动态作用力（本文忽略啮合阻尼）

$$\Delta F_{12} = -\Delta F_{21} = k_c \Delta_s = k_c \left[\left(r_2 \theta_q^{(2)} - r_1 \theta_g^{(1)} \right) + \left(y_q^{(2)} - y_g^{(1)} \right) \sin\alpha + \left(x_q^{(2)} - x_g^{(1)} \right) \cos\alpha \right] \quad (1)$$

其中　k_c－齿轮平均啮合刚度，　　　ΔS－两齿轮轴心沿啮合线的相对位移，

　　r_i（$i = 1, 2$）－齿轮基圆半径，$x_g^{(1)}$，$y_g^{(1)}$，$x_q^{(2)}$，$y_q^{(2)}$ 一齿轮轴心的弯曲位移，

　　$\theta_g^{(1)}$，$\theta_q^{(2)}$－齿轮扭转位移，　　α－齿轮压力角。

上标 '1' 表示主动轴，上标 '2' 表示从动轴，下标 g，q 分别表示主动轮和从动轮所在节点号。

动态扭矩
$$\begin{cases} \Delta T_1 = -\Delta F_{12} r_1 \\ \Delta T_2 = \Delta F_{12} r_2 \end{cases} \quad (2)$$

设 ΔF_{xi}，ΔF_{yi}，ΔT_i（$i = 1, 2$）分别为齿轮啮合力在 x_j，y_i，T_i 方向的广义分力。令

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & r_1\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -r_2\cos\alpha \\ & \sin^2\alpha & r_1\sin\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & -r_2\sin\alpha \\ & & r_1^2 & -r_1\cos\alpha & -r_1\sin\alpha & -r_1 r_2 \\ & & & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & r_2\cos\alpha \\ \text{对} & \text{称} & & & \sin^2\alpha & r_2\sin\alpha \\ & & & & & r_2^2 \end{bmatrix}$$

$S = \left(x_g^{(1)}, y_g^{(1)}, \theta_g^{(1)}, x_q^{(2)}, y_q^{(2)}, \theta_q^{(2)} \right)$

那么 $\left(\Delta F_{x1} \quad \Delta F_{y1} \quad \Delta T_1 \quad \Delta F_{x2} \quad \Delta F_{y2} \quad \Delta T_2 \right)^T = k_c A S^T$　　　　…… (3)

写出各单个轴的弯曲振动方程和扭转振动方程，通过（3）式可将整个系统中各转子的弯扭振动方程耦合起来，形成描述系统弯扭耦合振动的微分方程组，式（3）即系统弯扭耦合关系的数学模型。

2　弯扭耦合新模型

上节我们在推导弯扭耦合模型时，曾假设"齿轮啮合线的方向不变"。事实上，由于各转子的弯曲振动，两齿轮中心距将不断改变，从而使得啮合线方位也不断改变，即使啮合力大小不变，ΔF_{xi}、ΔF_{yi}也会不断改变，成为转子弯曲振动的一个激励原因。下面，我们将通过计入啮合线瞬时方向的变化对动态啮合力的影响，导出一个新的弯扭耦合模型。

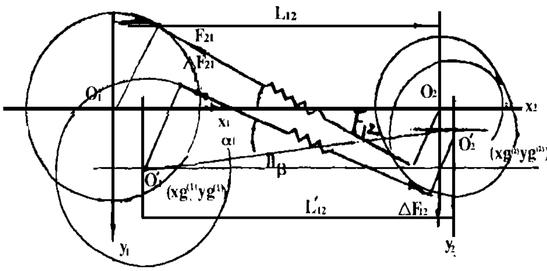

图 3

2.1 转子弯曲振动产生的影响[5]

在图 3中，设轮 1、轮 2的中心开始时分别位于 O_1、O_2，中心距为 L_{12}，转子的弯曲振动使 O_1移到 O_1'，O_2移到 O_2'，由此导致：

(1) 中心距从 L_{12}变为 L_{12}'

$$L_{12}'=\sqrt{(L_{12}+x_q^{(2)}-x_g^{(1)})^2+(y_g^{(1)}-y_q^{(2)})^2}\approx L_{12}+x_q^{(2)}-x_g^{(1)} \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$\Delta L=L_{12}'-L_{12}=x_q^{(2)}-x_q^{(1)} \qquad \cdots\cdots(5)$$

(2) 压力角由 α变为 α'

$$\text{令 } \alpha'=\alpha+\Delta\alpha \text{ 则 } \Delta\alpha\approx-\frac{(r_1+r_2)\Delta L}{L_{12}^2\cos\alpha}=-\frac{(r_1+r_2)(x_q^{(2)}-x_g^{(1)})}{L_{12}^2\cos\alpha} \qquad \cdots\cdots(6)$$

(3) 中心线与 ox 方向的夹角由 0变成 β

$$\beta\approx tg\,\beta=\frac{y_g^{(1)}-y_q^{(2)}}{L_{12}} \qquad \cdots\cdots(7)$$

啮合线与 ox 方向的夹角的变化量　$\Delta\alpha'=\Delta\alpha-\beta$ $\qquad \cdots\cdots(8)$

2.2 对力、力矩变化的描述

当两齿轮轴弯曲振动和扭转振动同时发生时，动态啮合力的大小、方向将同时产生变化，两齿轮间的啮合力在 x 、y 方向的分量及两轮上的力矩分别为

静态时

$$\begin{cases} F_{x1}=-F_{12}\cos\alpha \\ F_{y1}=-F_{12}\sin\alpha \\ T_1=-F_{12}r_1 \\ F_{x2}=F_{12}\cos\alpha \\ F_{y2}=F_{12}\sin\alpha \\ T_2=F_{12}r_2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(9)$$

动态时

$$\begin{cases} \Delta F_{x1}=-\Delta F_{12}\cos\alpha+F_{12}\sin\alpha\Delta\alpha' \\ \Delta F_{y1}=-\Delta F_{12}\sin\alpha-F_{12}\cos\alpha\Delta\alpha' \\ \Delta T_1=-\Delta F_{12}r_1 \\ \Delta F_{x2}=\Delta F_{12}\cos\alpha-F_{12}\sin\alpha\Delta\alpha' \\ \Delta F_{y2}=\Delta F_{12}\sin\alpha+F_{12}\cos\alpha\Delta\alpha' \\ \Delta T_2=-\Delta F_{12}r_2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(10)$$

其中

F_{12}—法向啮合力，ΔF_{12}由（1）式给出。

将（10）表示成矩阵形式：

$$(\Delta F_{x1},\ \Delta F_{y1},\ \Delta T_1,\ \Delta F_{x2},\ \Delta F_{y2},\ \Delta T_2)^T = k_c A S^T + B S^T \qquad \cdots\cdots (11)$$

其中

$$B=\begin{bmatrix} -\dfrac{F_{12}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L_{12}} & -\dfrac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & 0 & \dfrac{F_{12}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L_{12}} & \dfrac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & 0 \\ \dfrac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & \dfrac{F_{12}\cos\alpha}{L_{12}} & 0 & \dfrac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & -\dfrac{F_{12}\cos\alpha}{L_{12}} & 0 \\ \dfrac{F_{12}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L_{12}} & \dfrac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & 0 & -\dfrac{F_{12}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L_{12}} & -\dfrac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & 0 \\ -\dfrac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & -\dfrac{F_{12}\cos\alpha}{L_{12}} & 0 & \dfrac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & \dfrac{F_{12}\cos\alpha}{L_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（11）式是一个新的更全面更精确的弯扭耦合关系，可以看到，若忽略啮合线位置变化对ΔF_{xi}、ΔF_{yi}的影响，（11）式立刻退化成（3）式。

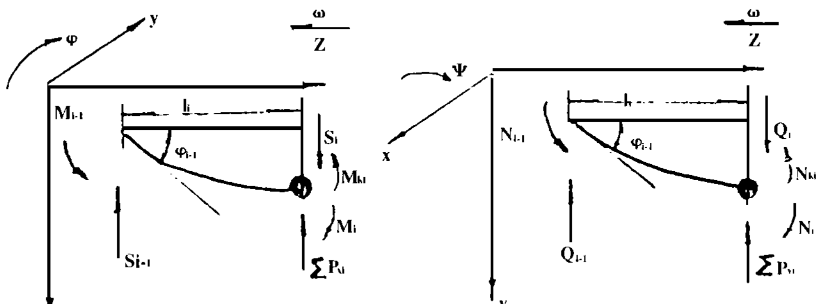

图 4

3　系统的振动方程

将转子按【6】中方法离散成n段无质量弹性轴和$n-1$个集总质量。忽略轴承阻尼对扭转振动的影响。

3.1　扭转振动方程【7】

主动轴

$$\begin{cases} I_{Z,1}^{(1)}\ddot{\theta}_1^{(1)} + k_2^{(1)}\theta_1^{(1)} - k_2^{(1)}\theta_2^{(1)} = 0 \\ I_{Z,n-1}^{(1)}\ddot{\theta}_{n-1}^{(1)} - k_{n-1}^{(1)}\theta_{n-2}^{(1)} + k_{n-1}^{(1)}\theta_{n-1}^{(1)} = 0 \\ I_{Z,p}^{(1)}\ddot{\theta}_p^{(1)} + k_{p+1}^{(1)}(\theta_p^{(1)} - \theta_{p+1}^{(1)}) + k_p^{(1)}(\theta_p^{(1)} - \theta_{p-1}^{(1)}) = 0 \quad p=2,3,\cdots g-1,\ g+1,\ \cdots,\ n-2 \end{cases}$$

$$\cdots\cdots (12a)$$

对齿轮所在节点g，

$$I_{z,g}^{(1)}\ddot{\theta}_g^{(1)} - k_g^{(1)}\theta_{g-1}^{(1)} + (k_g^{(1)} + k_{g+1}^{(1)} - r_1^2 k_c)\theta_g^{(1)} - k_{g+1}^{(1)}\theta_{g+1}^{(1)} + r_1 r_2 k_c\theta_q^{(2)} + k_c r_1\sin\alpha(y_q^{(2)} - y_g^{(1)})$$
$$+ k_c r_1\cos\alpha(x_q^{(2)} - x_g^{(1)}) = 0 \qquad \cdots\cdots (12b)$$

从动轴

$$\begin{cases} I_{Z,1}^{(2)}\ddot{\theta}_1^{(2)} + k_2^{(2)}\theta_1^{(2)} - k_2^{(2)}\theta_2^{(2)} = 0 \\ I_{Z,n-1}^{(2)}\ddot{\theta}_{n-1}^{(2)} - k_{n-1}^{(2)}\theta_{n-2}^{(2)} + k_{n-1}^{(2)}\theta_{n-1}^{(2)} = 0 \\ I_{Z,p}^{(2)}\ddot{\theta}_p^{(2)} + k_{p+1}^{(2)}(\theta_p^{(2)} - \theta_{p+1}^{(2)}) + k_p^{2}(\theta_p^{(2)} - \theta_{p-1}^{(2)}) = 0 \quad p=2,3,\cdots g-1,\ g+1,\ \cdots,\ n-2 \end{cases}$$

$$\cdots\cdots (12c)$$

对齿轮所在节点 q

$$I_{z,q}^{(3)}\ddot{\theta}_q^{(3)} - k_q^{(3)}\theta_{q-1}^{(3)} + \left(k_q^{(3)} + k_{q+1}^{(3)} - r_2^2 k_c\right)\theta_q^{(3)} - k_{q+1}^{(3)}\theta_{q+1}^{(1)} + r_1 r_2 k_c\theta_q^{(3)} - k_c r_2\sin\alpha\left(y_q^{(3)} - y_g^{(1)}\right)$$
$$- k_c r_2\cos\alpha\left(x_q^{(3)} - x_g^{(1)}\right) = 0 \qquad \cdots\cdots (12\ d)$$

$I_{z\cdot p}^{(3)}$ 为第 i 轴上第 p 个集总质量的极转动惯量，$k_p^{(1)}$ 为第 i 轴上第 p 个轴段的扭转刚度。

3.2 轴的弯曲振动方程

一般地，由图 4，第 i 个轴段在 x 方向有

$$\begin{Bmatrix} x \\ \varphi \\ M \\ S \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & -\dfrac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & -\dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi \\ M \\ S \end{Bmatrix}_{i-1}^R + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_k \\ \sum P_x \end{Bmatrix}_i \qquad \cdots\cdots (13\ a)$$

同样，y 方向上有

$$\begin{Bmatrix} y \\ \psi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & -\dfrac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & -\dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \psi \\ N \\ Q \end{Bmatrix}_{i-1}^R + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_k \\ \sum P_y \end{Bmatrix}_i \qquad \cdots\cdots (13\ b)$$

(13 a) 和 (13 b) 中，上标 R 表示质点的右端面，M、N 为轴段所受弯矩，S、Q 为轴段所受剪力。其中

$$\begin{Bmatrix} M_k \\ N_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 0 & -I_z\omega \\ I_z\omega & 0 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_i \qquad \cdots\cdots (13\ c)$$

上式第一项为惯性力矩项，第二项为陀螺力矩项。

$$\begin{Bmatrix} \sum P_x \\ \sum P_y \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \end{Bmatrix}_i$$
$$\cdots\cdots (13\ d)$$

上式第一项为惯性力，第二，三项分别为轴承的阻尼力与弹性力，第四项为齿轮动态啮合力。令

$$M_j = \begin{bmatrix} m_j & 0 \\ 0 & m_j \end{bmatrix},\ M_\theta = \begin{bmatrix} I_{\theta w} & 0 \\ 0 & I_\theta \end{bmatrix},\ C_{bj} = \begin{bmatrix} d_{xxj} & d_{xyj} \\ d_{yxj} & d_{yyj} \end{bmatrix};\ C_{zj} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{zj}(1)^2 \\ I_{zj}w^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{bj} = \begin{bmatrix} k_{xxj} & k_{xyj} \\ k_{yxj} & k_{yyj} \end{bmatrix};\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ X_j = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_j;\ \Phi_i = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \psi \end{Bmatrix}_j;\ D_j = B_j I_j;$$

$$\alpha_{1i} = \frac{12D_i}{L_j^3} \quad \alpha_{2i} = \frac{6D_i}{L_j^2} \quad \alpha_{3i} = \frac{D_i}{L_j}$$

则主动轴的弯曲振动方程为　　$\alpha_{2j} = \dfrac{6D_j}{l_j^2}$;　　$\alpha_{3j} = \dfrac{D_j}{l_j}$

则主动轴的弯曲振动方程为

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M_R \end{bmatrix}_1^{(1)} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix}_1^{(1)} + \begin{bmatrix} C_b & 0 \\ 0 & \delta_1 C_Z \end{bmatrix}_1^{(1)} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}_1^{(1)} - \left\{ \begin{bmatrix} K_b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_1^{(1)} + \begin{bmatrix} \alpha_3 I & \alpha_2 I \\ \alpha_2 I & 4\alpha_1 I \end{bmatrix}_1^{(1)} \right\} \begin{Bmatrix} X \\ \Phi \end{Bmatrix}_1^{(1)}$$

$$- \begin{bmatrix} \alpha_3 I & -\alpha_2 I \\ \alpha_2 I & -2\alpha_1 I \end{bmatrix}_2^{(1)} \begin{Bmatrix} X \\ \Phi \end{Bmatrix}_2^{(1)} = 0 \qquad \cdots\cdots (14)$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M_\theta \end{bmatrix}_{n-1}^{(1)} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix}_{n-1}^{(1)} + \begin{bmatrix} C_b & 0 \\ 0 & \delta_1 C_Z \end{bmatrix}_{n-1}^{(1)} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}_{n-1}^{(1)} - \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \alpha_2 I \\ -\alpha_2 I & -2\alpha_1 I \end{bmatrix}_{n-1}^{(1)} \begin{Bmatrix} X \\ \Phi \end{Bmatrix}_{n-1}^{(1)}$$

$$+ \begin{bmatrix} K_b + \alpha_3 I & -2\alpha_2 I \\ -2\alpha_2 I & 4\alpha_1 I \end{bmatrix}_{n-1}^{(1)} \begin{Bmatrix} X \\ \Phi \end{Bmatrix}_{n-1}^{(1)} = 0 \qquad \cdots\cdots (15)$$

齿轮所在节点 g：

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M_\theta \end{bmatrix}_g^{(1)} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix}_g^{(1)} + \begin{bmatrix} C_b & 0 \\ 0 & \delta_1 C_Z \end{bmatrix}_1^{(1)} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}_g^{(1)} - \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \alpha_2 I \\ -\alpha_2 I & -2\alpha_1 I \end{bmatrix}_g^{(1)} \begin{Bmatrix} X \\ \Phi \end{Bmatrix}_{y-1}^{(1)}$$

$$+ \left\{ \begin{bmatrix} K_g + \alpha_3 I & -2\alpha_2 I \\ -\alpha_2 I & 4\alpha_1 I \end{bmatrix}_g^{(1)} + \begin{bmatrix} \alpha_3 I & \alpha_2 I \\ \alpha_2 I & 4\alpha_1 I \end{bmatrix}_{g+1}^{(1)} \right\} \begin{Bmatrix} x \\ \Phi \end{Bmatrix}_g^{(1)} - \begin{bmatrix} \alpha_3 I & -\alpha_2 I \\ \alpha_2 I & -2\alpha_1 I \end{bmatrix}_{g+1}^{(1)} \begin{Bmatrix} x \\ \Phi \end{Bmatrix}_{g+1}^{(1)} + \delta_2$$

$$[\Delta F_x, \ \Delta F_y, \ 0, \ 0]_g^{r(1)} = 0 \qquad \cdots\cdots (16)$$

其中 $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$。

$$\begin{bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_c\cos^2\alpha + \frac{F_{12}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L_{12}} & k_c\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & k_c r_1\cos\alpha & -k_c\cos\alpha\frac{F_{12}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L_{12}} & -k_c\sin\alpha\cos\alpha\frac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & -k_c r_2\cos\alpha \\ K_c\sin\alpha\cos\alpha\frac{F_{12}\sin^2\alpha}{L_{12}} & k_c\sin\alpha\frac{F_{12}\cos\alpha}{L_{12}} & k_c r_1\sin\alpha & -k_c\sin^2\alpha\cos\alpha\frac{F_{12}\sin\alpha}{L_{12}} & -k_c\sin\alpha + \frac{F_{12}\cos\alpha}{L_{12}} & -k_c r_2\sin\alpha \end{bmatrix} \cdot H$$

$$H = \left\{ x_g^{(1)}, \ y_g^{(1)}, \ \theta_g^{(1)}, \ x_q^{(2)}, \ y_q^{(2)}, \ \theta_q^{(2)} \right\}$$

当 $\delta_2 = 0$时得到第 i 点 ($i = 2, \ 3, \ \cdots, \ g-1, \ g+1, \ \cdots, \ n-2$) 的振动方程，设为 (17) 式。

上面式 (13) ～ (16) 中，上标 (1) 表示主动轴，下标 i 表示第 i 个节点，只须将式 (13) ～ (16) 中上标 (1) 改为 (2)，将 (16) 式中的下标 g 改为 q，并取 $\delta_1 = \delta_2 = -1$，就得到从动轴上各点的弯曲振动方程，设为 (18) 式。

将 (12)、(14) ～ (18) 式联立起来就得到描述 GBR 系统弯扭耦合振动的振动方程组，最后总可以整理成下面标准形式：

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0 \qquad \cdots\cdots (19)$$

M 为总质量阵，C 为总阻尼阵，K 为总刚度阵，X 为

$$(x_1^{(1)}, \ y_1^{(1)}, \ \varphi_1^{(1)}, \ \Psi_1^{(1)}, \ \cdots, \ x_{n-1}^{(1)}, \ y_{n-1}^{(1)}, \ \varphi_{n-1}^{(1)}, \ \Psi_{n-1}^{(1)}, \ \theta_1^{(1)}, \ \cdots, \ \theta_{n-1}^{(1)},$$
$$x_1^{(2)}, \ y_1^{(2)}, \ \varphi_1^{(2)}, \ \Psi_1^{(2)}, \ \cdots, \ x_{n-1}^{(2)}, \ y_{n-1}^{(2)}, \ \varphi_{n-1}^{(2)}, \ \Psi_{n-1}^{(2)}, \ \theta_1^{(2)}, \ \cdots, \ \theta_{n-1}^{(2)})^T$$

求 (19) 式的特征值就可得到系统稳定性、阻尼固有频率等振动特性。

4 总结

(1) 通过计入齿轮瞬时啮合线位置的变化对动态啮合力的影响，建立了一个新的齿轮－转子－轴承系统弯扭耦合振动模型。以前文献中的模型只是本文新模型的特例。

(2) 给出了新模型基础上的齿轮－转子－轴承系统弯扭耦合振动方程组。

(3) 通过求解本文给出的弯扭耦合振动方程组，可望对系统的振动特性有更深刻、更全面的认识，具体的数值结果及分析将另文发表。

参 考 文 献

1 Iannuzzelli, R, J., Elward, R. M., "Torsional-Lateral Coupling in Geared Rotors", ASME, No. 84, 84-GT-71.

12 Wachel, J. D., Szerasi, F. R., "Field Verification of Lateral-Torsional Coupling Effectsion Rotor Instabilities in Centrifugal Compressors", NASA conference Publication, No. 2147, 1980.

3 马红，《齿轮－轴承－转子系统弯扭耦合振动特性研究》：[硕士学位论文]，西安交通大学，1993。

4 Takuzo Iwatsubo, Shirou Arii, etal., "Coupled Lateral-torsional Vibration of Rotor System Trained by Gears", Bulletin of JSME, Vol. 27, No, 224, Feb. 1984.

5 虞烈，"齿轮啮合的多平行轴系统弯扭耦合振动"，西安交通大学科技报告，1994, 5。

6 钟一锷，何衍宗，王正，《转子动力学》，清华大学出版社，1987。

7 朱勤，"齿轮－滑动轴承－转子系统耦合振动及轴向瞬态冲击过程的研究"，[博士学位论文]，西安交通大学，1993。11。

A New Model of Gear-Rotor-Bearing System Lateral-Torsional Coupling Vibration

Xia Boqian
(*Zhengzhou University of Technology*)

Yu Lie Xie Youbo
(*Insitute of Lubrication Theory and Bearing. Xi'an Jiaotong University*)

Abstract Changing of posion of meshing lint to dynamic meshing force is considered. Base on this modcl, a group of differential equations of Lateral-torsional coupling vibration of GRBS were proposed, which describe vibration properties of GRBS more comprehensively.

Keywrods gear-rotor-bearing system lateral-torsional coupling vibration mathematical model