第 17 卷 第 4 期
1996 年 12 月
郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technology
Vol. 17 No. 4.
Dec. 1996

Banach 空间四阶非线性微分方程周期边值问题

戚 仕 硕
(商丘师专数学系 商丘 476000)

摘 要：本文采用单调迭代技术研究了弱序列完备 Banach 空间中形如：

$u^{(4)}=f(t,u,u',u'',u''')$，$u^{(i)}(a)=u^{(i)}(b)$，$i=0,1,2,3$ 的周期边值问题，首次得到了关于最大解与最小解的存在性定理。

关键词：Banach 空间 非线性微分方程 周期边值
中图分类号：O151

1 引言

关于抽象空间一阶，二阶微分方程边值问题的研究，目前已有大量结果，如[3]，[4]，[6]，[7]，等等，但是研究三阶或三阶以上边问题的文献却相当少，O'Regan[8]使用连续延拓方法讨论了某Banach 空间中一类奇异的三阶非线性微分方程边值问题。本文则不同于[8]，采用单调迭代技术研究了 Banach 空间中四阶非线性微分方程周期边值问题并给出了其最大解与最小解的存在性。

本文考虑：

$$(PBVP)\quad U^{(4)}=f(t,u,u',u'',u'''),$$
$$U^{(i)}(a)=u^{(i)}(b),\ i=0,1,2,3$$

其中，$f\in C[I\times E\times E\times E\times E,E]$，$I=[a,b]\subset R^1$，$a<b$，$(E,\|\cdot\|)$，为实的弱序列完备 Banach 空间。

2 基本概念与引理

设 E 是 Banach 空间，E^* 是 E 的共轭空间，K 是 E 中的锥，$K^*=\{\varphi\in E^*|\varphi(x)\in\leqslant 0,\forall\ x\in K\}$为 K 的共轭锥。E 中半序"$\leqslant$"由 K 导出：$x\leq y$，$x,y\in E$，若 $y-x\in K$。于是可定义 $C[I,E]$中半序：$U\geqslant v$，$u,v\in C[I,E]$，若 $U(t)\geq v(t)$，$\forall\ t\in I$。$C^1[I,E]$，$C^2[I,E]$，…中的半序类似定义。在不致引起混淆的情况下，抽象函数 $u(t)$，$u'(t)$，…中的自变量 t 将略去。有关抽象函数的讨论，请见[9]。

下面介绍 Banach 空间中锥的概念及有关结论：

定义 1 设 E 是实 Banach 空间，$K\subset E$ 为非空凸闭集，若 K 满足：(i)$x\in K$，$\lambda\geq 0\Rightarrow\lambda x\in K$，及(ii)$x\in K$，$-x\in K\Rightarrow x=\theta$，则 K 是 E 中一个锥。

定义 2 若存在 $\delta>0$，使当 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$，$x_1\in K$，$x_2\in K$ 时，恒有 $\|x_1+x_2\|\geqslant\delta$，

收稿日期：1995－10－16

则称 K 是正规的。

定义 3　若 $K-K=E$，即对 $\forall\ x\in K$，使存在 $x_1,x_2\in K$，使 $x=x_1-x_2$，则称 K 是再生的。

引理 1　(见[1])K 是正规的充要条件是存在 $N>O$，当 $Q\leq x\leq y$ 时恒有 $\|x\|\leq N\|y\|$。

引理 2　(见[2])设 E 为 Banach 空间，K 为 E 中的锥，K^* 为 K 的共轭锥，则：

(1)K 是再生的当且仅当 K^* 是正规的；

(2)K 是正规的当且仅当 K^* 是再生的。

引理 3　(见[2])K 是 E 中的锥，则 $x\in K$ 当且仅当 $\varphi(x)\leq 0$，对 $\forall\ \varphi\in K^*$。

定义 4　设 $\{Un\}\subset E$，$U\in E$，若对 $\forall\ \varphi\in E^*$，$\lim\limits_{N\to\infty}\varphi(U_n)=\varphi(u)$，则称 $\{U_n\}$ 弱收敛于 u，记作 $\mu n\xrightarrow{W}\mu$；若 $\lim\limits_{N\to\infty}\|U_n-U\|=O$，则称 $\{U_n\}$ 强收敛于 u，记作 $U_n\longrightarrow\pi$.

引理 4　(见[10])设 $\{U_n\}\subset E$，$\{v_n\}\subset E$，$U_a\leq v_n$，$n=1,2\cdots$ 若 $U_n\xrightarrow{W}u$，$U_n\xrightarrow{W}v$，则 $u\leqslant v$.

引理 5　(见[5])设 E 是 Banach 空间，K 是 E 中正规锥，，$\{u_n\}$ 是 E 中的全序序列，则 $u_n\to u_n$ 当且仅当 $u_n\xrightarrow{w}u_n$。

引理 6　设 $u_n(t):I\to E$ 上逐点收敛，且 $\{u_n(t)\}$ 在 I 上一致收敛。

证明　用反证法。假若 $\{u_n(t)\}$ 在 I 上不一致收敛，则 $\exists\ \varepsilon_0>0$、及 $\{n_i'\}$，$\{n_i''\}\subset\{n\}$，$t_i\in I$，使得

$$\|u_{n_i'}(t_i)-\mu_{n_i''}''(t_i)\|\geq\varepsilon_0 \tag{2.1}$$

对于 ε_0，由 $\{u_n(t)\}$ 的等度连续性，知 $\exists\ \delta_0>0$，使得当 $t',t''\in I$，$|t'-t''|<\delta_0$ 时，有

$$\|u_n(t')-u_n(t'')\|<\varepsilon_O/4 \tag{2.2}$$

因 I 是紧区间，故不妨设 $t_i\to t^*\in I(i\to\infty)$。于是，对于上述 $\delta_0>0$，$Ei_0>0$，当 $i>i_o$ 时，$|t_i-t^*|<\delta_o$，

从而，由(2.2)知 $\|u_n(t_i)-u_n(t^*)\|<\varepsilon_o/4$(2.3)所以，当 $i>i_O$ 时，由(2.1)及(2.3)得

$\|u_{n_i}'(t*)-u_{n_i}''(t^*)\|$

$\geq\|u_n{}'_i(t_i)-u_n{}''_i(t_i)\|-\|u_{n'_i}(t_i)-U_{n'_i}(t^*)\|-\|U_{n''_i}(t_i)-u_{n''_i}(t^*)\|>\varepsilon_o-\varepsilon_o/4-\varepsilon/4=\varepsilon_o/2.$

这表明 $\{U_n(t^*)\}$ 不是基本列、与题设矛盾。

3　若干命题

现在研究周期边值问题(PBVP)。本文除非特别声明，总设定$(E,\|\cdot\|)$为实弱序列完备 Banach 空间，KCE 为正规锥，“$\leq$”是 E 中由 K 导出的半序。乘积空间 $E\times E\times E\times E$ 记为 Σ。

在 Σ 中规定加法与数乘运算如下：

对 $\forall\ U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}$，$V=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\end{pmatrix}\in\Sigma$ 及 $\alpha\in R^1$，$u_i,v_i\in E_{(i)}$，$i=1,2,3,4$，规定

$$U+V=\begin{pmatrix}v_1+V_1\\v_2+V_2\\v_3+V_3\\v_4+V_4\end{pmatrix},\alpha\cdot U=\begin{pmatrix}\alpha U_1\\\alpha U_2\\\alpha U_3\\\alpha U_4\end{pmatrix}。$$

易知，Σ 在上面的加法与数乘运算下为线性空间；进一步地，在 Σ 中规定范数：$\|U\|_\Sigma=\|u_1\|_{(1)}\|+u_2\|_{(2)}+\|u_3\|_{(3)}+\|u_4\|_{(4)}$，对$\forall\ U=(u_1,u_2,u_3,u_4)^T\in\Sigma$，则$(\Sigma,\|.\|_\Sigma)$为线性赋范空间。

说明：$E_{(i)}$，$\|\cdot\|_{(i)}$之右下角标(i)仅表序号，无其他意义，在不致引起混淆的情况下可略去，下同。

由锥的定义，即知 $K\times K\times K\times K\triangleq K_\Sigma$ 为 Σ 中锥，Σ 中半序(仍记作"$\leq$")规定为：$U\geq V$，$U,V\in\Sigma$(或 $U-V\in\Sigma K_\Sigma$)，当且仅当 $u_i\geq v$，$u_i,v_i\in E_{(i)}$，$i=1,2,3,4$，u_i,v_i 分别是 U，V 的第 i 个分元。

为简便起见，使用 R_1,R_2 代表以下假设：R_1)存在 $\alpha_o,\hat{\alpha},\beta_o,\hat{\beta},v_o,\hat{v},\eta_o,\hat{\eta},\in C^1[I,E]$，使得 $\alpha_o(t)\leq\hat{\alpha}(t)$，$\beta_o(t)\leq\hat{\beta}(t)$，$v_o(t)\leq\hat{v}(t)$，$\eta_o(t)\leq\eta_o(t)$，$\forall\ t\in I$；而且，$\alpha_o'\leq\beta_o$，$\beta_o'\leq v_o$，$v_o'\leq\eta_o$，$\eta_o'\leq f(t,\alpha_o,\beta_o,v_o,\eta_o)$，

$\alpha_o(a)\leq\alpha_o(b)$，$\beta_o(a)\leq\beta_o(b)$，$v_o(a)\leq v_o(b)$，$\eta_o(a)\leq\eta_o(b)$，

$\hat{\alpha}_o'(a)\geq\hat{\beta}_o$，$\hat{\beta}_o'(b)\geq\hat{v}\geq\hat{\eta}_o$，$\hat{\eta}_o'\geq f(t,\hat{\alpha}_o,\hat{\beta}_o,\hat{v}_o,\hat{\eta}_o$，

$\hat{\alpha}_o(a)\geq\hat{\alpha}_o(b)$，$\hat{\beta}_o(a)\geq\hat{\beta}_o(b)$，$\hat{v}_o(a)\geq\hat{v}_o(b)$，$\hat{\eta}_o(a)\geq\hat{\eta}_o(b)$。$R_2$)存在 $M>o$，使得对$\forall\ \alpha_1,\beta_1\in[\alpha_o,\hat{\alpha}_o]$，$\alpha_2,\beta_2\in[\beta_o,\hat{\beta}_o]$，$\alpha_3,\beta_3[v_o,\hat{v}_o]$，$\alpha_4,\beta_4\in[\eta_o,\hat{\eta}_o]$，则有

$\alpha_i\leq\beta_i$，$i=1,2,3,4$，蕴函：

$$\beta_2-\alpha_2\geq-M(\beta_1-\alpha_1),$$
$$\beta_3-\alpha_3\geq-M(\beta_2-\alpha_2),$$
$$\beta_4-\alpha_4\geq-M(\beta_3-\alpha_3),$$

及 $f(t,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)-f(t,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\geq-M(\beta_4-\alpha_4)$。

为了研究(PBVP)，需首先介绍若干命题：

命题1　若 E 为 Banach 空间，则 $E\times E$ 亦然，且$(E_{(1)}\times E_{(2)})^*\cong E_{(1)}^*\times E_{(2)}^*$，即，$(E_{(1)}\times E_{(2)})^*$ 与 $E_{(1)}^*\times E_{(2)}^*$等距同构。

证明　$E\times E$ 中运算如 $E\times E\times E\times E$ 中所定义，在 $E\times E$ 中规定范数：$|||U|||=\|x\|_{(1)}+\|y\|_{(2)}$，对$\forall\ U=(x,y)^1\in E\times E$。易知$(E\times E,|||\cdot|||)$为赋范线性空间。

下证 $E\times E$ 的完备性。设$\{U_n\}$为 $E_{(1)}\times E_{(2)}$中的柯西列(设 $U_n=(x_1^{(n)},x_2^{(n)})$)，那么有

$\|x_1^{(n)}-x_1^{(m)}\|_{(1)}+\|x_2^{(n)}-x_2^{(m)}\|_{(2)}=|||(x_1^{(n)}-x_1^{(m)},x_2^{(n)}-x_2^{(m)})|||=|||(x_1^{(n)},x_2^{(n)})-(x_2^{(m)},x_2^{(m)})|||=|||U_n-U_m|||\to o,(n,m\to\infty)$所以 $\|x_1^{(n)}-x_1^{(m)}\|_{(1)}\to o$，$\|x_2^{(n)}-x_2^{(m)}\|_{(2)}\to o$，$(n,m\to\infty)$。

最后证明：$(E_{(1)}\times E_{(2)})^*\cong E_{(1)}^*\times E_{(2)}^*$。

对于$\forall\ f\in(E_{(1)}\times E_{(2)})^*$。对$\forall\ U=(s_1,x_2)\in E_{(1)}\times E_{(2)}$，可写 $U=(x_1,\theta)+(\theta,x_2)$，则 f

$(U)=f(x_1,x_2)$。现把(x_1,θ),(θ,x_2)分别看作$E_{(1)}$,$E_{(2)}$中的元,记$f_1(x_1)=f(x_1,\theta)$,$f_2(x_2)=f(\theta,x_2)$,易知这样定义的f_1,f_2均线性且是唯一确定的。

因$|f_1(x_1)|=|f(x_1,\theta)|\leq\|f\|\cdot|||(x_1,\theta)|||=\|f\|\cdot(\|x_1\|+0)=\|f\|\cdot\|x_1\|$故,$\|f_2\|\leq\|f\|$,

同理,$\|f_2\|\leq\|f\|$,

所以,$\max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}\leq\|f\|$.

于是,$f_i\in E^*_{(i)}$,$i=1,2$,且$f(U)=f_1(x_1)+f_2(x_2)\triangleq(f_1,f_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$(此仅作记号而已),由 U 的任意性知

$f\overset{\rightarrow}{=}(f_1,f_2)\in E^*_{(1)}\times E^*_{(2)}$,

反过来,$\forall\ (f_1,f_2)\in E^*_{(1)}xE_{(2)}{}^*$,即$f_1\in E^*_{(1)}$,$f_2E_{(2)}{}^*$,对$\forall\ \in x_1E_1,x_2\in E_{(2)}$,现把$x_1,x_2$看作$E_{(1)}\times E_{(2)}$中的元$(x_1,\theta)$,$(\theta,x_2)$。记$f(x_1,\theta)=f_1(x_1)$,$f(\theta,x_2)=f_2(x_2)$,易知$f(\cdot,\theta)$,$f(\theta,\cdot)$均线性。

下证:$f(x_1,\theta)+f(\theta,x_2)=f(x_1,x_2)$,且 f 是唯一确定的。不然,设$f(x_1,\theta)+f(\theta,x_2)=g_f(x_1,x_2)$,易证$g_f(\cdot,\cdot)$线性,从而$(g_f-f)(\cdot,\theta)$及$(g_f-f)(\theta,\cdot)$均线性。于是,对$\forall\ (x,y)\in E_{(1)}\times E_{(2)}$,有

$$(g_f-f)(x,y)=(g_f-f)[(x,\theta)+(\theta,y)]=(g_f-f)(x,\theta)+(g_f-f)(\theta,y)=$$
$$g_f(x,\theta)-f(x,\theta)+g_f(\theta,y)-f(\theta,y)=f(x,\theta)-f(x,\theta)+f(\theta,y)-f(\theta,y)=o$$

故,由 Hahn—Banach 定理知$g_f\equiv f$,即 f 线性且是唯一确定的。

又 $|f(x_1,x_2)|=|f_1(x_1)+f_2(x_2)|\leq\|f_1\|\ \|x_1\|+\|f_2\|\ \|x_2\|$

$\leq\max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}\cdot(\|x_1\|+\|x_2\|)$

$=\max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}\cdot|||(x_1,x_2)|||$.

故,$\|f\|\leq\max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}$。

因此, $f\in(E_{(1)}\times E_{(2)})^*$,且$(f_1,f_2)\overset{\rightarrow}{=}f$。

综上所述,$f\overset{\leftrightarrow}{=}(f_1,f_2)$,容易验证该一一对应线性同构,而且,$\|f\|=\max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}$.

所以,$(E_{(1)}{}^*\times E^*_{(2)})\cong E^*_{(1)}\times E^*_{(2)}$。

符号说明:"$A\overset{\rightarrow}{=}B$"表唯一的 B 与 A 对应,同时也有唯一的 A 与 B 对应。

推论 在Σ中同样规定范数$\|\cdot\|_\Sigma$:$\|U\|_\Sigma=\|U_1\|_{(1)}+\|U_2\|_{(2)}+\|U_3\|_{(3)}+\|U_4\|_{(4)}$,对$\forall\ U\in=(U_1,U_2,U_3,U_4)^T\in$,则$(\Sigma,\|\cdot\|_\Sigma)$为 Banach 空间,且$\Sigma^*\cong E^*_{(1)}\times E^*_{(2)}\times E^*_{(3)}\times E^*_{(4)}$,$\Sigma^*$中加法与数乘运算同$\Sigma$中。

注 1 根据推论,对于$\forall\ \Psi\in\Sigma^*$,设$\Psi\overset{\leftrightarrow}{=}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\in E^*_{(1)}\times E^*_{(2)}\times E^*_{(3)}\times E^*_{(4)}$;且对$\forall\ U=(u_1,u_2,u_3,u_4)^T\in\Sigma$,则有$\Psi(U)$中$\sum_{i=1}^{4}\varphi_i(u_i)$。

命题 2 若 K 为 E 中的正规锥,则K_Σ为Σ中正规锥。

证明 设$U=(u_1,u_2,u_3,u_4)^T\in\Sigma$,$V=(v_1,v_2,v_3,v_4)^T\in\Sigma$,且$\theta\leq U\leq V$,则

由 Σ 中半序的定义知　$\theta\le u_i\le v_i, i=1,2,3,4$。而 $K\subset E$ 为正规锥,即 $\exists\ N>o$,使得 $\| u_1\| \le N\| v_i\|$,于是,$\| U\|_\Sigma=\sum\limits_{i=1}^{4}\| u_{i(i)}\le\sum\limits_{i=1}^{4}N\| v_i\|_{(i)}=N\sum\limits_{i=1}^{4}\| v_i\|_{(i)}=N\| V\|_\Sigma$,

所以,K_Σ 为 Σ 中的正规锥。

注 2　K_Σ 的共轭锥是 $K_\Sigma^*=\{\Psi\in\Sigma^* \mid \Psi(U)\le o, \forall\ U\in K_\Sigma\}$。

对于(PBVP),令 $\begin{pmatrix}x\\u\\v\\w\end{pmatrix}=U$, $\begin{pmatrix}u\\v\\W\\f(t,x,u,v,w)\end{pmatrix}=F(t,U)$,则(PVBP)转化为

$(PBVP)_1$　　$U'=F(t,U), U(a)=U(b)$.

其中,$U\in C[I,\Sigma]$,Σ 为 Banach 空间,并且 $F\in C[I\times\Sigma,\Sigma]$。实际上,

对于 $\forall\ t_n, t\in I$,且 $t_n\to t(n\to\infty)$;以及,$\forall\ U_n=(x_n,y_n,Z_n,r_n)^T\in\Sigma$,$U=(x,y,z,r)^T\in\Sigma$,且 $U_n\to U(n\to\infty)$,则

$\| F(t_n,U_n)-F(t,U)\|\Sigma=\| x_n-x\|+\| y_n-y\|+\| Z_n-z\|+\| f(t_n,x_n,Z_n,r_n)-f(t,x,y,z,r)\|\to o,(n\to\infty)$。

相应地,假设 R_i 转化为 R_i':

R_1'),存在 $V_o, W_o\in C^1[I,\Sigma]$,使得 $V_o(t)\le W_o(t), \forall\ t\in I$;

并且,　$V_o'(t)\le F(t,V_o), V_o(a)\le V_o(b)$;

$W_o'(t)\ge F(t,W_o), W_o(a)\ge W_o(b)$.

其中 $V_o=\begin{pmatrix}\alpha_o\\\beta_o\\\upsilon_o\\\eta_o\end{pmatrix}$, $W_o=\begin{pmatrix}\hat\alpha_o\\\hat\beta_o\\\hat\upsilon_o\\\hat\eta_o\end{pmatrix}$。

R_2')　存在 $M>0$,使得 $\forall\ V,U\in[V_o,W_o]$ 且 $V\le U$ 蕴涵 $F(t,U)-F(t,V)\ge -M(U-V)$。

命题 3　若假设 R_1',R_2' 均满足,则周期边值问题 $(PBVP)_1$ 在 $[V_o,W_o]$ 中一定有解。更进一步,若分别以 V_o,W_o 为初始元,作迭代序列

$V_n(t)=e^{-M(t-a)}[Y_{V_{n-1}}+e^{-Ma}\int_a^t(F(s,V_{n-1}(s))+MV_{n-1}(s))e^{Ms}ds]$ 与　$W_n(t)=e^{-M(t-a)}[Y_{W_{n-1}}+e^{-Ma}\int_a^t(F(s,W_{n-1}(s))+MW_{n-1}(s)e^{Ms}ds]$。(3.1)

其中,$Y_{V_{n-1}}=\dfrac{1}{e^{Mb}-e^{Ma}}\int_a^b(F(s,V_{n-1}(s))+MV_{n-1}(s))e^{MS}ds$,

$$Y_{W_{n-1}}=\frac{1}{e^{Mb}-e^{Ma}}\int_a^b(F(s,W_{n-1}(s))+MW_{n-1}(s))e^{MS}ds, n=1,2,\cdots$$

那么,$\{V_n(t)\}$ 和 $\{W_n(t)\}$ 分别在 I 上依 Σ 中范数一致收敛于 $(PBVP)_1$ 在 $[V_o,W_o]$ 中的最小解与最大解。

证明　对于 $\forall\ H\in[V_o,W_o]$,考察线性微分方程周期边值问题:

$(PBVP)_2$ $U'(t)=F(t,H(t))-M(U(t)-H(t))$,

$U(a)=U(b), t\in I$。

易知 $U(t)=e^{-M(t-a)}[Y_H+e^{-Ma}\int_a^t (F(s,H(s))+MH(s)e^{Ms}ds]$是$(PBVB)_2$ 的唯一解,其中

$$Y_H = U(a) = U(b) = \frac{1}{e^{Mb}-e^{Ma}}\int_a^b (F(s,H(s))+MH(s))e^{Ms}ds, \tag{3.2}$$

对于 $H\in[V_o,W_o]$,定义算子 $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}H = e^{-M(t-a)}[Y_H + e^{-Ma}\int_a^t (F(s,H(s)+MH(s))e^{Ms}ds] \tag{3.3}$$

则 $\mathscr{A}$ 是映$[V_o,W_o]\lambda C[I,\Sigma]$的增算子(由 R_2' 即得)。

我们说,$V(t)$是$(PBVP)_1$ 的解当且仅当 $V(t)$是 $\mathscr{A}$ 的不动点,$\forall\ t\in I$。实际上,若 $V(t)$ 是$(PBVP)_1$ 的解,对$\forall\ \Psi\in\Sigma^*$,令 $m(t)=\Psi(V(t)-\mathscr{A}V(t))$则

$m'(t)=\Psi(V'(t)-(\mathscr{A}V(t))')=\Psi(F(t,V)-F(t,V))=0$,

又 $m(a)=\Psi(V(a)-\mathscr{A}V(a))=\Psi(Y_V-Y_V)=o$,

故 $m(t)=o,\forall\ t\in I$。由 Ψ 的任意性知 $V(t)-\mathscr{A}V(t)=\theta,\forall\ t\in I$,即 $V=\mathscr{A}V$;

反过来,设 $V(t)=\mathscr{A}V(t),\forall\ t\in I$。对该等式两边求导,得

$V'(t)=(\mathscr{A}V(t))'=F(t,V_{(t)},$;且 $V(a)=\mathscr{A}V(a)=Y_v=\mathscr{A}V(b)=V(b)$

即 $V(t)$ 是$(PBVP)_1$ 的解,对$\forall\ t\in I$。依 $\mathscr{A}$ 的定义,显然迭代序列(3.1)可写为

$$V_n = \mathscr{A}V_{n-1}, W_{n-1} = \mathscr{A}W_{n-1}, n = 1,2,\cdots \tag{3.4}$$

为了简便,记 $V_n=(v_{n1},v_{n2},v_{n3},v_{n4})^T$,

$$W_n = (W_{n1},W_{n2},W_{n3},W_{n4})^T, \text{下证:} V_{\le}\ \mathscr{A}V_o, \mathscr{A}W_o \le W_o \tag{3.5}$$

注意到 $V_o=(\alpha_o,\beta_o,v_o,\eta_o)^T$,因 $\mathscr{A}V_o=V_1$ 满足

$$V_1' = F(t,V_o) - M(V_1 - V_o), V_1(a) = V_1(b).$$

或者,

$$\begin{pmatrix} v_{11}' \\ v_{21}' \\ v_{31}' \\ v_{41}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ v_o \\ \eta_o \\ f(t,\alpha_o,\beta_o,v_o,\eta_o) \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} v_{11}-\alpha_o \\ v_{21}-\beta_o \\ v_{31}-v_o \\ v_{41}-\eta_o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{11}(a) \\ v_{21}(a) \\ v_{31}(a) \\ v_{41}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11}(b) \\ v_{21}(b) \\ v_{31}(b) \\ v_{41}(b) \end{pmatrix}。 \tag{3.6}$$

于是 $\forall\ \psi_1\in K_{(1)}^*$,记 $m_1(t)=\varphi_1(v_{11}(-\alpha_o'(t))$,

由(R_1')与(3.6)得

$$m_1'(t) = \varphi_1(v_{11(t)}' - \alpha'_0(t)) = \varphi_1(\beta_o - M(v_{11}(t) - \alpha_o(t)) - \alpha_o'(t)) \ge \varphi_1(-M(v_{11}(t) - \alpha_o(t)) = -Mm_1(t) \tag{3.7}$$

$$m_1(a) = \varphi_1(v_{11}(a) - \alpha_0(a)) \ge \varphi_1((v_{11}(b) - \alpha_o(b)) = m_1(b) \tag{3.8}$$

往证:$m_1(t)\ge 0,\forall\ t\in I$. 若不然,$\exists\ t_o\in I$,使

$$m(t_o) = \varphi_1(v_{11}(t_o) - \alpha_o(t_o)) = \min_{t\in I} m_1(t) < o \tag{3.9}$$

由(3.8)式知，可取 $t_o \neq a$ 故 $t_o \in (a,b)$，于是 $m_1'(t_o) < o$，

再由(3.7)式知 $o \geq m_1'(t_o) \geq -Mm_1(t_o) > o$，产生矛盾。故，$m_1(t) = \varphi_1(v_{11}(t) - \alpha_o(t)) \geq o, \forall\ t \in I$，依引理 2 知 $v_{11}(t) - \alpha_o(t) \in K_{(1)}$，或者 $v_{11}(t) \geq \alpha_o(t), \forall\ t \in I$，即 $v_{11} \geq \alpha_o$；同理可证 $v_{21} \geq \beta_0, v_{31} \geq v_o, v_{41} \geq \eta_o$。

所以　$AV_o = V_1 = (v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41})^T = (v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41})^T = V_o$. 类似地，可证 $AW_o \leq W_o$。

对于$\forall\ H_1, H_2 \in [V_o, W_o]$，且 $H_1 \leq H_2$，由假设 R_2' 知

$$F(t,H_1(t)) + MH_1(t) \leq F(t,H_2(t)) + MH_2(t), t \in I \tag{3.10}$$

于是，由(3.2)式知 $Y_{H1} \leq Y_{H2}$，从而由(3.3)，(3.10)式知 $\mathscr{A}H_1 \leq \mathscr{A}H_2$，由此及(3.5)式即知由(3.4)式确定的迭代序列满足

$$V_o \leq V_l \leq \cdots \leq V_n \leq \cdots \leq W_n \leq \cdots \leq W_l \leq W_o。 \tag{3.11}$$

往证：$\{V_n\}$ 是 $C[I,E]$ 中的基本列。

一方面，对$\forall\ \Psi \in \sum^*$，设 $\Psi \overset{\leftrightarrow}{=} (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in E_{(1)}^* \times E_{(2)}^* \times E_{(3)}^* \times E_{(4)}^*$，即 $\varphi_i \in E_{(i)}^*, i = 1,2,3,4$。任意取定 $t_o \in I$。

由于 $K_{(i)}$是正规锥，根据引理 3，知 $K_{(i)}^* = \{f \in E_{(i)}^* | f(x) \geq o, \forall\ x \in K_{(i)}\}$是再生的，于是存在 $\varphi_{i1} \in K_{(i)}^*, \varphi_{i2} \in K_{(i)}^*$，使 $\varphi_i = \varphi_{i1} - \varphi_{i2}$。由(3.11)式，知 $v_{oi}(t_o) \leq v_{1i}(t_o) \leq v_{2i}(t_o) \leq \cdots \leq v_{ni}(t_o) \leq \cdots \leq W_{oi}(t_o)$，再由 $\varphi_{ij} \in K_{(i)}^*, j = 1,2$，知 $\varphi_{ij}(v_{oi}(t_o)) \leq \varphi_{ij}(v_{1i}(t_o)) \leq \cdots \leq \varphi_{ij}(v_{ni}(t_o)) \leq \varphi_{ij}(w_{oi}(t_o))$。这表明$\{\varphi_{ij}(v_{ni}(t_o))\}$，$u = 1,2$ 是 R' 中基本列，从而$\{\varphi_i(v_{ni}(t_o))\}$也是 R' 中基本列，进而$\{\Psi(V_n(t_o))\}$也是 R' 中基本列。由 Ψ 或 φ_i 的任意性及 $E_{(i)}$的弱序列完备性，知$\exists\ \bar{v}_{io} \in E_{(i)}$，使得 $v_{ni}(t_o) \xrightarrow{W} \bar{v}_{oi}, i = 1,2.3.4$。

所以，$\Psi(V_n(t_o)) = \sum\limits_{i=1}^{4} \varphi_i(v_{ni}(t_o)) \to \sum\limits_{I=1}^{4} \varphi_i(\bar{v}_{oi}) = \Psi(\bar{v}_o)$，

其中，$\bar{v}_o = (\bar{v}_{o1}, \bar{v}_{o3}, \bar{v}_{o4})^T \in E_{(1)} \times E_{(2)} \times E_{(3)} \times E_{(4)}$；再由 $\Psi \in \sum^*$ 的任意性知 $V_n(t_o) \xrightarrow{W} \bar{v}_o$。

因此，根据引理 5，$V_n(t_o) \to V_o$。由 t_o 的任意性即知$\{V_n(t)\}$在 I 上逐点收敛。

另一方面，证明$\{V_n(t)\}$在 I 上等度连续。

依据 R_2' 及(3.11)式知，

$$F(t_o,V_o(t)) + MV_o(t) \leq F(t,V_n(t)) + MV_n(t) \leq F(t,W_o(t)) + MW(t_o),$$

或，$\theta \leq F(t,V_n(t)) + MV_n(t) - (F(t,V_o(t)) + MV_o(t))$

$\leq F(t,W_o(t)) + MW_o(t) - (F(t,V_o(t)) + MV_o(t))$

$= F(t,W_o(f)) - F(t,V_o(t)) + M(W_o(t) - V_o(t))$

由 K_Σ 为 Σ 中正规锥，知$\exists\ N_o > o$，使

$$\| F(t,V_n(t)) + MV_n(t) - (f(t,V_o(t)) + MV_o(t) \|_\Sigma$$
$$\leq N_o \| F(t,W_o(t)) - F(t,V_o(t)) + M(W_o(t) - V_o(t)) \|_\Sigma$$

从而，$\| F(t,V_n(t) + MV_n(t) \|_\Sigma$

$\leq \| F(t,V_o(t)) + MV_o(t) \|_\Sigma + N_o \| Ft,W_o(t)) - F(t,V_o(t) \|_\Sigma + N_oM \| W_o(t) - V_o(t) \|_\Sigma$

$\leq \max\limits_{t \in I} \| F(t,V_o(t)) + MV_o(t) \|_\Sigma + N_o \max\limits_{t \in I} \| F(t,W_o(t)) - F(t,V_o(t)) \|_\Sigma + N_oM \cdot \max\limits_{t \in I} \|$

$W_o(t)-W_o(t)\|_\Sigma\triangleq M_1,\forall t\in I,n=1,2\cdots$。

故$\{F(t,V_n(t))+MV_n(t)\}$在I上一致有界。

同理可证，$\{V_n(t)\}$在I上一致有界，设存在$M_2>o$，使$\|V_n(t)\|_\Sigma\le M_2$。

故，由$V'_n(t)=F(t;V_{n-1}(t))-M(V_n(t)-V_{n-1}(t))=F(t,V_{n-1}(t))+MV_{n-1}(t)-MV_n(t)$，知$\|V'n(t)\|_\Sigma\le M_1+M\cdot M_2,\forall t\in I,n=1,2\cdots$，

即，$\{V'_n(t))\}$在I上一致有界。

所以，$\{V_n(t)\}$在I上等度连续。

因此，根据引理6，知$\{V_n\}$在$C[I,\Sigma]$中一致收敛，设其极限为$\tilde{V}$。

因$V_n(t)=e^{-M(t-a)}[Y_{V_{n-1}}+e^{-Ma}\int_a^t(F(s,V_{n-1}(s))+MV_{n-1}(s))e^{Ms}ds=\mathscr{A}V_{n-1}(t)$，及$V\overrightarrow{\underrightarrow{\ }}\tilde{V}(t),\forall t\in I,(n\to\infty)$

于是，$Y_{V_{n-1}}=\frac{1}{e^{Mb}-e^{Mb}}\int_a^b(F(s,V_{n-1}(s))+MV_{n-1}(s))e^{Ms}ds$

$$\rightrightarrows\frac{1}{e^{Mb}-e^{Mb}}\int_a^b(Fs,\tilde{V}(s))+M\tilde{V}(s))e^{Ms}ds=Y_{\tilde{V}},\forall t\in I,(n\to\infty)$$

从而，$\mathscr{A}V_{n-1}(t)\rightrightarrows e^{-M(t-a)}[Y\tilde{V}+e^{-Ma}\int_b^t(F(s,\tilde{V}(s))+M\tilde{V}(s))e^{Ms}ds=\mathscr{A}\tilde{V}(t),\forall t\in I(n\to\infty)$。

所以，$\tilde{V}(t)=\mathscr{A}\tilde{V}(t),\forall t\in I$。

由前面的讨论知$\tilde{V}(t)$即是$(PBVP)_1$的解。同理可证，$\{W_n\}$在$C[I,\Sigma]$中一致收敛于$\tilde{W}$且$\tilde{W}(t)$也是$(DBVP)_1$的解。

最后证：$\tilde{V},\tilde{W}$分别是$(PBVP)_1$的最小解与最大解，且$V_o\le\tilde{V},\tilde{W}\le W_o$。

设U是$(PBVP)_1$的在$[V_o,W_o]$上的任一解，则由前面的讨论知，$U=\mathscr{A}U$.

由$V_o\le U\le W_o$及$\mathscr{A}$的递增性，知$V_o\le\mathscr{A}^nV_o\le\mathscr{A}^nU\le\mathscr{A}^nW_o\le W_o$，

即，$V_o\le V_n\le U\le W_n\le W_o,n=1,2,\cdots$

令$n\to\infty$，得$V_o\le\tilde{V}\le U\le\tilde{W}\le W_o$。

4 主要结果

定理　对于周期边值问题(PBVP)，若假设R_1及R_2均满足，那么(PBVP)在$[\alpha_o,\hat{\alpha}_0]$上存在最小解与最大解。

证明　根据命题3，对于$\tilde{V},\tilde{W}$，令

$\tilde{V}=(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha})^T,\tilde{W}=(\tilde{\beta},\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\tilde{\beta}_3)^T$，直接验证，知$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$均是(PBVP)在$[\alpha_o,\hat{\alpha}_0]$上的解，且$\tilde{\alpha}',\tilde{\beta}'\in[\beta_o,\hat{\beta}_o],\tilde{\alpha}'',\tilde{\beta}''\in[v_o,\hat{v}_o],\tilde{\alpha}''',\tilde{\beta}'''\in[\eta_o,\hat{\eta}_o]$。

下证：$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$分别是(PBVP)在$[\alpha_o,\hat{\alpha}_o]$上的最小解与最大解。

设u是(PBVP)在$[\alpha_o,\hat{\alpha}_o]$上的任一解，且$u',u'',u'''$分别在$[\beta_o,\hat{\beta}_o],[v_o,\hat{v}_o],[\eta_o,\hat{\eta}_o]$中，于是知$U=(u,u',u'',u''')^T$是$(PBVP)_1$在$[V_o,W_o]$上的解，所以$\tilde{V}\le U\le\tilde{W}$，从而推得$\tilde{\alpha}\le u\le\tilde{\beta}$.

致谢:本文曾得到北京科技大学解基培教授的热情指导,作者在此深表感谢。

参 考 文 献

1 郭大钧,非线性泛函分析,山东科技出版社,1985。

2 K. Deimeing, Nonlinear Functioal Analysis, Springer－Verlag, 1985, 222－223

3 孙经先,Banach 空间常微分方程的解,数学学报, Vol33. No:3(1990), 378－379

4 郭大钧,孙经先,抽象空间常微分方程,山东科技出版社,1989。

5 孙经先·Banach 空间中某些新的列紧性的判别法及应用,数学年刊,11A(4)1990,409。

6 V. Lakshmikantham &. . S . Leela, Noneinear Differential Eauations in Abstract Spaces, Pergaman Press, New York, 1981

7 V. Lakshmikantham & S. W. Du, Monofone iterative technique for differential eauations in Banach Spaces, J. Math, Anal Appe. 87(1982)。

8 O'Regan, D. , Singular & nonsingular third－order differentiae eauations , Droc. Amer. Math. Soc. 113(1991)noL3, 761－775.

9 夏道行等,泛函分析第二教程,高等教育出版社,1987。

10 孙经先,非连续的增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用,数学学报,31(1988),101－107。

Question of Reriod Boundany Ualue of Four－order Nonlinear Differential Equations in Banch Space

Qi Shishuo

(*Department of Mathematics of Shang qiu Teachers Institute*)

Abstract In this paper, monotone iterative technique was used to study the question of Period boundary value of weak Sequence in Complete Banch space with patterns Such as: $u^{(4)}=f(t,u,u',u'',u''')$, $u^{(i)}(a)=u^{(i)}(b)$, $i=0,1,2,3$ and reached the theory of lie－on principle about maximal Solution and minimal Solation

Key words banch space , nonlinear differential equations , period boundary value.