第 17 卷　第 3 期
1996 年　9　月
郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technoloy
Vol. 17　No. 3.
Sep.　1996

新摄动法的一个应用

刘渭川　　王光龙
（郑州粮食学院）（郑州工业大学化工系）

摘　要：本文主要应用修正的完全近似法·处理一类方程·得到$O(\varepsilon^2)$近似解。

关键词：修正的完全近似法，摄动，全导数，非线性。

中图分类号：0176.82

1　引言

大量力学模型常常抽象为一非线性微分方程。虽然对线性微分方程的解的理论有相当完备的结果，但如何处理非线性问题仍是当前数学研究的热门话题。非线性问题解的研究，比较有效的方法是摄动法。在这方面积累了大量文献，具体请看[1]。1990 年戴世强、西加洛夫等在文献[2]提出修正的完全近似法，引进含自变量和因变量的非线性坐标变换，使渐近解中高阶项为零。以首项解来表示具有准确度高的解。此方法避免了其它摄动法运算的烦琐，较有效地解决了强非线性问题。本文主要应用此结果处理经典的 Duffing 方程 $O(\varepsilon^2)$ 近似解，并将结果和其它摄动法比较，讨论方程的性质。

2　主要结果

单位质量的质点在弹性恢复力$-g(x)$作用下的一维运动方程是

$$\ddot{x}+g(x)=0 \qquad x\in R' \qquad \cdots(1)$$

特殊地$g(x)=x+\varepsilon x^3$　便是带立方刚度项的渐硬弹簧特性，其中ε是小参数，对于力学系统，加边界条件。

$$\ddot{x}+x+\varepsilon x^3=0, x(o)=a, \dot{x}(o)=0 \qquad \cdots(2)$$

经过数值分析可知有很复杂的动力学行为，若附加周期外力扰动，它可表示许多力学模型，关于此方程的深入性质参考文献[3]，本文主要应用[2]中提出的方法，得到方程(2)的$o(\varepsilon^2)$解。

按修正的完全近似法，对方程(2)引入如下变换

$$\begin{cases} x=x(\tau)+o(\varepsilon^2) \\ \tau=t+\varepsilon F[x(t)]+o(\varepsilon^2) \end{cases} \qquad \cdots(3)$$

$F[x(o)]=\frac{d}{dt}F[x(o)]=O$ 其中 F 为待定泛函。

将变换(3)代入方程(2)，并令ε的系数为零，从而方程(2)变为：

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+x(\tau)=0 \\ x(o)=a, \frac{dx}{d\tau}(o)=0 \end{cases} \qquad \cdots(4)$$

收稿日期：1995－10－09

因为方程(4)有周期解 x=a·cosτ，所以我们得到所求泛函数 F

$$F=\int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\left[\frac{dx}{d\tau}(\tau_1)\right]^2}\cdot\int_0^{\tau_1}\frac{dx}{d\tau}(\tau)f\left[x(\tau),\frac{dx}{d\tau}\right]d\tau$$

$$=\int_0^\tau \frac{d\tau_1}{d^2sin^2\tau_1}\cdot\int_0^T asin\tau\cdot a^3cos^3\tau d\tau$$

$$=\int_0^\tau \frac{a^4(1-sin^4\tau_1)}{a^2sin^2\tau_1}\cdot\frac{d\tau_1}{4}=a^2\int_0^\tau\frac{1+cos^2\tau_1}{4}d\tau_1$$

$$=\frac{a^2}{4}(\frac{3\tau}{2}+\frac{sin2\tau}{4}) \tag{5}$$

上面 F 的求法是由 ε 的系数为零，解二阶线性方程得到的，具体参考[2]。

将所求泛函 F 的结果(5)代入(3)得到

$$\tau=t+\frac{a^2}{4}(\frac{3t}{2}+\frac{sin2t}{4})\varepsilon+o(\varepsilon^2)$$

$$x=x[t+\frac{a^2}{4}(\frac{3t}{2}+\frac{sin2t}{4})\varepsilon]+o(\varepsilon^2) \tag{6}$$

这样，我们就得到方程(2)估计不超过 O(ε²)的近似解：

$$x=acos[t+\frac{a^2}{4}(\frac{3t}{2}+\frac{sin2t}{4})\varepsilon]+o(\varepsilon^2)$$

整理为 ε、ε²、ε³…级数形式

$$x=acost-\frac{a^3sint}{4}(\frac{3t}{2}+\frac{sin2t}{4})\varepsilon+o(\varepsilon^2)$$

即 $x=acost-\varepsilon a^3(\frac{3t}{8}+\frac{1}{32}(cost-cos3t))+o(\varepsilon^2)\cdots$ (7)

3 结果讨论：

从上面的论证，我们得到方程(2)的 o(ε²)近似解(7)，此解的形式和用 Poincare 摄动法得出的结果完全一致，但用修正的完全近似法其运算确实十分简洁，不必象其它摄动法那样求一组微分方程的解。而且解的形式十分整齐，重复上述步骤便可得到更高阶的精确解。

参考文献

1 陈予恕、唐云等 非线性动力学中的现代分析方法 科学出版社 1992.10.

2 戴世强 若干强非线性问题的近似解析解，中国科学 A 辑 NO.21990 P153－162

3 凌复华编著 非线性动力系统的数值研究 上海交通大学出版社，1989.6.

Aapplication of new perturbation method

Liu Wei chuan Wang Guanglong

(Zhlngzhon Institute of Cereal)(Zhengzhoa University of Technologg)

Abstract In this paper, we use the method of changed complite approximate method dealing with Duffing equation and obtain O(ε²) approximate solution. This solution has O(ε²) form and conclusion is clear.

Key word changed complete approximate method, perturbation, frechet derivative. nonlinear.