关于模糊控制的数学模型

闫家杰
（郑州工业大学数力系）

摘要　本文讨论了模糊控制的一般数学模型，指出了它的某些不足之处，并从实用角度提出了改进意见。改进后的数学模型不仅便于运算和操作，而且更适于实际应用。

关键词　模糊控制，数学模型，特征展开法
中图分类号　O 141.4

应用 *Fuzzy* 控制技术研制的 *Fuzzy* 家电产品，如 *Fuzzy* 洗衣机、*Fuzzy* 空调器、*Fuzzy* 吸尘器、*Fuzzy* 微波炉、*Fuzzy* 彩电等等，91年在日本大量上市，它们不仅大大地减轻了人们的家务劳动，而且大大地节约了水、电、气能源。标有“*Fuzzy*”（模糊）字样的家电产品成为市场上最受欢迎的电器，被人们誉为“称心的 *Fuzzy* 保姆”。其占领市场之广泛，更新速度之快令人惊叹，在世界上引起巨大反响。

本文讨论 *Fuzzy* 控制的一般数学模型，并从实用角度提出了作者的见解及改进意见。

（一）

设观测量为 $x\in X$，控制量为 $y\in Y$，语言控制规则是：若 x 是 $\underset{\sim}{A}i\in F(X)$ 则 y 是 $\underset{\sim}{B}i\in F(Y)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中 $\underset{\sim}{A}i$ 为 Fuzzy 输入，$\underset{\sim}{B}i$ 为 Fuzzy 输出（或叫 Fuzzy 响应）。

解 Fuzzy 关系方程组

$$\underset{\sim}{A}\,i o \underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}\,i(i=1,2,\cdots,n)$$

得最大公共解（如果存在的话）$\underset{\sim}{R}$，把 $\underset{\sim}{R}$ 作为控制规则，对任意的 Fuzzy 输入 $\underset{\sim}{A}\in F(X)$，在可响应的情况下，可算出 Fuzzy 输出 $\underset{\sim}{B}\in F(Y)$：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\, o \underset{\sim}{R}$$

再用最大隶属原则把 Fuzzy 响应 $\underset{\sim}{B}$ 变为确切响应 $y\in Y$，即可施加于被控对象。

这就是 Fuzzy 控制的一般的数学模型。

这种模型稍加修改也能适用于多元 Fuzzy 控制。

（二）

在上述 Fuzzy 控制的数学模型中，比较重要，也是比较困难的一步是控制规则 $\underset{\sim}{R}$ 的确定。特别是对于多元 Fuzzy 控制，即便在有限论域情形，控制规则 $\underset{\sim}{R}$ 的确定、表示和运算，都

河南省自然科学基金资助项目
收稿日期：1995－12－15

是不容易的。因此，人们就想方设法越过这一步，不求出控制规则 $\underset{\sim}{R}$，直接由 Fuzzy 输入求 Fuzzy 输出。现在通常采用的方法是所谓特征展开法：

设 Fuzzy 输入是 $\underset{\sim}{A}\in F(X)$。先求出 $\underset{\sim}{A}$ 对 $\underset{\sim}{A}i$ 的特征系数

$$a_i \triangleq \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{A}i \text{（内积）}$$

$$\triangleq \bigvee_{x\in X}(\underset{\sim}{A}(x)\wedge \underset{\sim}{A}i(x)) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.1}$$

则 Fuzzy 输出

$$\underset{\sim}{B}=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i \wedge \underset{\sim}{B}i)$$

其中

$$(a_i\wedge \underset{\sim}{B}i)\in F(Y)$$

$$(a_i\wedge \underset{\sim}{B}i)(x)\triangleq a_i \wedge \underset{\sim}{B}i(x),\forall x\in X$$

这种方法也适用于多元 Fuzzy 控制。

（三）

在实际应用中，观测量是非 Fuzzy 的，每次观测得到的观测量是一个数，在这种情形下，特征系数 a_i 的计算可以简化。

设观测量为 $x_0\in X$，显然，特征系数 a_i 就是 x_0 对 $\underset{\sim}{A}i$ 的隶属度 $\underset{\sim}{A}i(x_0)$，即

$$a_i=\underset{\sim}{A}i(x_0)$$

事实上，此时的非 Fuzzy 输入 x_0 可以看作一个特殊的 Fuzzy 集

$$\underset{\sim}{A}(x)\triangleq\begin{cases}1, & x=x_0\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \quad (x\in X)$$

由公式(2.1)

$$\begin{aligned} a_i &= \underset{\sim}{A}\, i \circ \underset{\sim}{A}i \\ &= \bigvee_{x\in X}(\underset{\sim}{A}(x)\wedge \underset{\sim}{A}i(x)) \\ &= 1\wedge \underset{\sim}{A}i(x_0)=\underset{\sim}{A}i(x_0)\end{aligned}$$

如果论域是离散的，如 X＝{－2，－1，0，1，2}（可以理解为刻度或等级），$\underset{\sim}{A}i=(a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3},a_{i_4},a_{i_5})\in F(X)$ 若观测量 x＝－1，则按照上边的结论，特征系数 a_i 就是 x＝－1 对 $\underset{\sim}{A}i$ 的隶属度 a_{i2}。不必再利用公式(2.1)作内积计算。

特别需要提出的是观测量也不一定是 X 中所列出的一级刻度，也可能是二级刻度、三级刻度等等。例如，观测量 x＝－0.7，此时如何求特征系数 a_i？当然可以考虑把－0.7 向离它最近的一级刻－1 靠扰，即用－1 近似地代替－0.7，但这显然会降低模糊控制的精度。

在实际应用中，通常可以把 $\underset{\sim}{A}i$ 的隶属函数 $\underset{\sim}{A}i(x)$ 看作线性函数，即把两点（－1，a_{i2}）和（0，a_{i3}）之间的隶属函数曲线看作直线，利用线性拆值法容易求出特征系数

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i2}+(-0.7-(-1))(a_{i3}-a_{i2}) \\ &= a_{i2}+0.3(a_{i3}-a_{i2}) \\ &= 0.7a_{i2}+0.3a_{i3}\end{aligned}$$

用这种办法可以求出任一观测量所对应的特征系数 a_i

（四）

在特征展开法中,Fuzzy 输出是由公式

$$\underset{\sim}{B}=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i \wedge \underset{\sim}{B}i)$$

来计算的。例如,设 Y={-3,-2,-1,0,1,2,3}(刻度),$\underset{\sim}{B}i=(b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_7})$,则

$$a_i \wedge \underset{\sim}{B}i=(a_i \wedge b_{i1},a_i \wedge b_{i2},\cdots,a_i \wedge b_{i7}) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

于是,a_i 实际上成了模糊集($a_i \wedge \underset{\sim}{B}i$)的隶属度的上界.凡大于 a_i 的 b_{ik} 都不再起作用.这样就必然失去一些已经得到的信息,是令人可惜的,为了避免这种情况出现,充分利用已有的各种信息,可以考虑把算子"∧"改为"·"(实数运算中的乘法),即 Fuzzy 输出改用公式

$$\underset{\sim}{B}=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i \cdot \underset{\sim}{B}i)$$

计算,其中

$$a_i \cdot \underset{\sim}{B}i \triangleq (a_i \cdot b_{i1},a_i \cdot b_{i2},\cdots,a_i \cdot b_{i7})$$

（五）

模糊控制的一般数学模型中,得到模糊响应之后,通常是用最大隶属原则把它变为确切响应,然后施加于被控对象。

如果 Fuzzy 响应

$$\underset{\sim}{B}=\int_{y}\frac{\underset{\sim}{B}(y)}{y}\in f(Y)$$

$\underset{\sim}{B}(y_0)=\max_{y\in Y}\underset{\sim}{B}(y)$,则取确切响应 $y=y_0$。

这种作法的好处是简明、易算,其不足也是丢失信息较多,只考虑最主要因素,完全不顾及次要因素。为加以改进,建议用加权平均法代替最大隶属原则。

若 $\underset{\sim}{B}(y)$是连续函数且可响应,则可取确切响应

$$Y=\frac{\int_{Y}y\underset{\sim}{B}(y)dy}{\int_{Y}\underset{\sim}{B}(y)dy}$$

常见的论域 Y 是离散的,例如,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,若 Fuzzy 响应是

$$\underset{\sim}{B}=\frac{b_1}{y_1}+\frac{b_2}{y_2}+\cdots+\frac{b_n}{y_n}$$

则取确切响应

$$y=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k b_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$$

实践证明,用这种加权平均法求得的确切响应效果较好,因为它按隶属度大小兼顾了所有因素。

（下转86页）

参考文献

1　资产评估概论. 中国企业管理中心编. 1988 年第一版
2　分析不等式. 广西人民出版社. 1986 年，PP99－106

The Mathematical Model On The Profit Present Value In Evaluating Enterprise Assets

Jia JunGuo
(Zhengzhou University of Technology, Dept of Math & Mech)

Abstract: The paper first analysies and points out the relation and characteristic of two main formulas(annuity, profit ability method) in the profit present value. Then, using the computer calculating skill, the paper gives a new formula, which is more general and rational, and integrates the above two formulas.

Key words: asset evaluation, profit present value, new formula, computer

（上接 79 页）

参考文献

1 闫家杰等，模糊数学基础及应用初阶，河南教育出版社，1993
2 罗承忠，模糊集引论，北师大出版社，1989

MATHEMATICS PATTERN ON FUZZY CONTROL

Yan Jiajie
(Zhengzhou University of Technology)

Abstract　In this paper, the general mathematics pattern of fuzzy control is discussed, and some shortcomigs of general mathematics pattern of fuzzy control are pointed out, and the improrements are proposed from the practical angle.

Key words　Fuzzy control, Mathematics pattern, Expanded method of characteristics