第17卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.17 No.1
1996年 3 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Mar. 1996

具 Gilbert 耗散项多变量铁磁链方程组初边值问题的整体强解*

王书彬 邢家省

(郑州工学院数理力学系 450002) (郑州大学 450052)

摘 要: 本文考虑具Gilbert耗散项的多变量铁磁链方程组的初边值问题，在适当的条件下，采用 Galerkin 方法和紧致性原理证明了整体强解的存在性，并得到了相应铁磁链方程组初边值问题整体弱解的存在性。

关键词: Gilbert 耗散项，铁磁链方程组，整体强解，整体弱解，Galerkin 方法

中图分类号: O175

1 引言

关于具有一般形式的铁磁链方程组 $Z_t = Z\times \triangle Z + f(x,t,Z)$
某些边值问题和初值问题弱解的存在性，已分别在文献[1−3]中研究过。

对带有 Gilbert 耗散项的铁磁链方程组

$$Z_t = -\alpha Z\times(Z\times\triangle Z)+\beta Z\times\triangle Z+f(x,t,Z)$$

在文献[4]中研究了一维空间变量情形周期边值问题和初值问题整体光滑解的存在唯一性，在文献[5]中研究了三维空间变量情形初边值问题整体弱解的存在性。

本文考虑更广泛的具 Gilbert 耗散项的铁磁链方程组

$$Z_t = -\alpha Z\times(Z\times LZ)+\beta Z\times LZ+f(x,t,z) \tag{1}$$

初边值问题 $Z|_{\partial\Omega}=0,\ t\geqslant 0$ (2)

$$Z(x,0)=\varphi(x),\ x\in\Omega R^n \tag{3}$$

其中 Ω 为有界区域，边界 $\partial\Omega$ 光滑，$Z(x,t)=(u(x,t),\ v(x,t),\ w(x,t))$ 为三维向量值未知函数，$f(x,t,Z)$ 是变元 (x,t,Z) 的向量值函数，“$\times$”表示 R^3 中的叉积，$\alpha>0$，β 为常

* 国家自然科学基金项目，项目编号：19371072
收稿日期：1995−03−26

数，$L=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j})$，$a_{i,j}\in C^1(\bar{\Omega})$，$(a_{ij}(x))$ 对称且一致正定，即存在常数 $\lambda>0$，使 $\sum_{i,j=0}^{n}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2$，对任意 $\xi\in R^n$ 成立。

方程组 (1) 是强耦合退化抛物型方程组，我们考虑正则化的旋方程组

$$Z_t=\varepsilon LZ-\alpha Z\times(Z\times LZ)+\beta Z\times LZ+f(x,t,z) \tag{1}_\varepsilon$$

$(\varepsilon>0)$ 的初边值问题 (2)(3) 整体强解的存在性，再令 $\varepsilon\to 0$，得到问题 (1)、(2)、(3) 整体强解的存在性。

记 $Q_T=\Omega X(0,T)$，我们作如下假设：

(I)　$f(x,t,Z)$ 关于 $(x,t,Z)\in Q_T\times R^3$ 连续，导数矩阵 $f_z(x,t,Z)$ 半有界，即存在常数 b，对任意的 $\xi\in R^3$，成立，$\xi f_z(x,t,Z)\xi\leqslant b|\xi|^2$，此外 $f_0(x,t)|_{\partial\Omega}\equiv f(x,t,0)|_{\partial\Omega}=0$.

(Ⅱ)　$|f(x,t,Z)|\leqslant A|Z|^l+B$, $0\leqslant l<+\infty(n=1)$; $1\leqslant l<+\infty$, $(n=2)$; $1\leqslant l\leqslant\frac{2(n-1)}{n-2}=1+\frac{n}{n-2}$, $(n\geqslant 3)$.

$$|\nabla_x f(x,t,Z)|\leqslant A|Z|^{1+\frac{2}{n}}+B.$$

其中 A，B 为非负常数。

(Ⅲ)　$\varphi(x)\in H_0^1(\Omega)$.

2　问题$(1)_\varepsilon$、(2)、(3)的整体强解

设 $\omega_j(x)$ 是问题　　$-L\omega_j=\lambda_j\omega_j$, $\omega|_{\partial\Omega}=0$

对应于特征值 λ_j 的特征函数，$\|\omega_j\|_{L^2(\Omega)}=1$，$j=1,2,\cdots$ 熟知，$\{\omega_j\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 的标准正交完备系，且在 $H_0^1(\Omega)$ 和 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 中完备[6]。

假设问题$(1)_\varepsilon$、(2)、(3)的近似解为

$$Z_N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}A_{jN}(t)\omega_j(x)$$

其中系数向量 $A_{jN}(t)$ 由下列非线性常微分方程组的初边值问题来确定

$$(Z_{Nt},\omega_j)=\varepsilon(LZ_N,\omega_j)-\alpha(Z_N\times(Z_N\times L_N),\omega_j)+\beta(Z_N\times LZ_N,\omega_j)+(f(x,t,Z_N),\omega_j) \tag{4}$$

$$(Z_N(x,0),\omega_j)=(\varphi(x),\omega_j),\quad j=1,2,\cdots,N \tag{5}$$

其中 $(z,v)=\int_\Omega vZdx$.

在以下引理条件及所作先验估计下，可知问题 (4)、(5) 在 $[0,T]$ 上存在整体解。

引理2.1 设条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)成立，则有

$$\|Z_N(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant e^{2(b+\delta)t}[\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2\delta}\int_0^t e^{-2(b+\delta)t}\|f_0(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau] \quad (6)$$

其中$\delta>0$为常数。

证明: 山(4)式，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Z_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant(f(x,t,Z_N),Z_N)$$
$$=(f(x,t,Z_N)-f(x,t,0),Z_N)+(f(x,t,0),Z_N)$$
$$\leqslant b\|Z_N(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta\|Z_N(\cdot\ t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\delta}\|f_0(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

利用Gromwall不等式，即得(6)式。

引理2.2 设引理2.1的条件满足，且$(a_{ij}(x))$为对角矩阵或$f_z(x,t,z)$有界，则有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla Z_N(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}+\sqrt{\varepsilon}\|LZ_N\|_{L^2(Q_T)}+\sqrt{\alpha}\|Z_N\times LZ_N\|_{L^2(Q_T)}\leqslant C \quad (7)$$

其中常数$C_1=C_1(T)$.

证明: 山(4)式，得

$$(Z_{Nt},LZ_N)=\varepsilon(LZ_N,LZ_N)-\alpha(Z_N\times(Z_N\times LZ_N),LZ_N)$$
$$+\beta(Z_N\times LZ_N,LZ_N)+(f(x,t,Z_N),LZ_N) \quad (8)$$

因为 $(f(x,t,z_N),LZ_N)=-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}Z_{Nx_j}f_{x_i}(x,t,Z_N)ds$

$$-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}Z_{Nx_j}f_z(x,t,Z_N)Z_{Nx_i}dx$$

由引理2.2的条件，得

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}Z_{Nx_j}\cdot f_z(x,t,Z_N)Z_{Nx_i}dx\leqslant K_1\|\nabla Z\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$|\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}Z_{Nx_j}\cdot f_{x_i}(x,t,Z_N)dx|\leqslant K_2\|\nabla Z_N\|^2_{L^2(\Omega)}+K_3\|\nabla_x f(x,t,Z_N\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant K_2\|\nabla Z_N\|^2_{L^2(\Omega)}+K_4\int_\Omega|Z_N|^{2+\frac{4}{n}}dx+K_5$$

$$\leqslant K_2\|\nabla Z_N\|^2_{L^2(\Omega)}+K_6\|Z_N\|^{\frac{4}{n}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla Z_N\|^2_{L^2(\Omega)}+K_7\|Z_N\|^{2+\frac{4}{n}}_{L^2}+K_5$$

将以上各式代入(8)，得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}Z_{Nx_j}Z_{Nx_i}dx+\varepsilon\|LZ_N\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\|Z_N\times LZ_N\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant K_8\|\nabla Z_N\|^2_{L^2(\Omega)}+K_9\leqslant K_{10}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}Z_{Nx_i}Z_{Nx_j}dx+K_9$$

由$Gronwall$不等式，即得估计式(7)。

引理2.3.设引理2.2的条件满足，$n\leqslant 4$，则有

$$\|Z_{Nt}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(0,T;\ H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_2 \tag{9}$$

其中常数$C_2=C_2(\alpha,T)$；当$n=1$时，$2\leqslant p<\infty$；当$n=2$时，$2<p<\infty$；当$3\leqslant n\leqslant 4$时，$p=n$.

证明.设$\Psi(x,t)\in L^p(0,T;\ H_0^1(\Omega))$，$\beta_j(t)=(\Psi,\omega_j)$，则

$$\Psi(x,t)=\sum_{j=1}^N\beta_j(t)\omega_j(x)+\sum_{j=N+1}^{\infty}\beta_j(t)\omega_j(x)=\Psi_N(x,t)+\tilde{\Psi}_N(x,t)$$

由(4)式，得

$$|\int_0^T(Z_{Nt},\Psi_N)dt|=\leqslant\varepsilon\|LZ_N\|_{L^2(Q_T)}\|\Psi_N\|_{L^2(Q_T)}+\alpha\|Z_N\times(Z_N$$

$$\times LZ_N\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)}\|\Psi_N\|_{L^p(Q_T)}+|\beta|\ \|Z_N\times LZ_N\|_{L^2(Q_T)}\|\Psi_N\|_{L^2(Q_T)}$$

$$+\|f(x,t,Z_N)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)}\|\varphi_N\|_{L^p(Q_T)}$$

利用估计式(7)及$Sobolev$嵌入定理，得

$$\|Z_N\times(Z_N\times LZ_N)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)}\leqslant\|Z_N\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(Q_T)}\|Z_N\times LZ_N\|_{L^2(Q_T)}\leqslant K_{11}\|Z_N$$

$$\times LZ_N\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\|f(x,t,Z_N)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)}\leqslant K_{12}\|Z_N\|^l_{L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)}+K_{13}$$

$$\leqslant K_{14}\|Z_N\|^l_{L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega))}+K_{13}$$

因此，由特征函数系的性质[6]，得

$$|\int_0^T(Z_{Nt},\ \Psi_N)dt|\leqslant K_{15}\|\Psi_N\|_{L^p(Q_T)}$$

$$\leqslant K_{16}\|\Psi_N\|_{L^p(0,T;\ H_0^1(\Omega))}$$

注意到$(Z_{Nt},\tilde{\Psi}_N)=0$，得

$$|\int_0^T(Z_{Nt},\ \Psi)dt|\leqslant K_{17}\|\Psi\|_{L^p(0,T;\ H_0^1(\Omega))}$$

由此即得估计式(9)。

引理2.4.设引理2.3的条件满足，则有

$$\|Z_N(\cdot,t_2)-Z_N(\cdot,t_1)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C_3|t_2-t_1|^{\frac{1}{p}} \tag{10}$$

其中常数$C_3=C_3(\alpha,\ T)$

证明 $\|Z_N(\cdot, t_2)-Z_N(\cdot, t_1)\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\|Z_{Nt}(t), Z_N(t_2)-Z_N(t_1))d\tau$$

$$\leqslant\left|\int_{t_1}^{t_2}\|Z_{Nt}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|Z_N(t_2)-Z_N(t_1)\|_{H_0^1(\Omega)}d\tau\right|\leqslant K_{18}\left|\int_{t_1}^{t_2}\|Z_{Nt}\|_{H^{-1}(\Omega)}d\tau\right|$$

$$\leqslant K_{19}|t_2-t_1|^{\frac{1}{p}}$$

即估计式(10)成立。

定义 2.1 三维向量值函数 $Z(x,t)$ 称为问题 $(1)_\varepsilon$、(2)(3)($\varepsilon\geqslant 0$, $\alpha>0$) 的整体强解，若 $Z(x,t)\in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega))$, $Z_t(x,t)\in L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)$, $\varepsilon LZ\in L^2(Q_T)$, $Z\times LZ\in L^2(Q_T)$, 且对任意的 $\Psi(x,t)\in L^p(Q_T)$, 成立

$$\iint_{Q_T} Z_t\cdot dxdt=\iint_{Q_T}[\varepsilon LZ-\alpha Z\times(Z\times LZ)+\beta Z\times LZ+f(x,t,Z)]\cdot\Psi dxdt \tag{11}$$

且 $Z(x,0)=\varphi(x)$, 在 $L^2(\Omega)$ 中, $\Omega\subset R^n$.

定理 2.1 若假设条件(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)满足，且 $a_{ij}(x))$ 为对角矩阵或 $f_z(x,t,Z)$ 有界，$\Omega\subset R^n$, $n\leqslant 4$, 则问题 $(1)_\varepsilon$、(2)、(3)($\varepsilon\geqslant 0$, $\alpha>0$) 存在整体强解，($\varepsilon=0$ 时，即问题(1)、(2)、(3)存在整体强解）。

证明．由(10)式知 $\{Z_N(\cdot, t)\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中关于 t 等度连续，又由 $Z_N(\cdot, t)$ 在 $C([0, T];\ H_0^1(\Omega))$ 中有界，$H_0^1(\Omega)$ 紧嵌入 $L^2(\Omega)$ 得，存在子列(仍记为 $Z_N(x,t)$) 及 $Z(x,t)$, 使

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z_N(\cdot, t)-Z(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}=0 \tag{12}$$

由 $\varphi(x)\in H_0^1(\Omega)$, 及特征函数系 $\{\omega_j\}$ 的性质，知

$$\lim_{N\to\infty}\|Z_N(\cdot, 0)-\varphi(x)\|_{L^2(\Omega)}=0$$

所以有 $Z(x,0)=\varphi(x)$, 在 $L^2(\Omega)$ 中。

利用估计式(6)、(7)和(12)式及紧致性原理，得知，对于任意的 $\Psi(x,t)\in L^p(0,T;\ H_0^1(\Omega))$, $\beta_j(t)=(\Psi, \omega_j)$, $j=1, 2, \cdots$

$$\Psi_m(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j(t)\omega_j(x)$$

由 $Z_N(x,t)$ 所满足的等式(4)，对任意固定的 m, 对 N 取极得

$$< Z_t, \Psi_m > = \iint_{Q_T} [\varepsilon LZ - \alpha Z\times(Z\times LZ) + \beta Z\times LZ + f(x,t,Z)]\cdot \Psi_m dxdt$$

其中 $<\cdot,\cdot>$ 表示 $L^{\frac{p}{p-1}}(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$ 与 $L^p(0,T;\ H_0^1(\Omega))$ 之间的对偶，再令 $m\to+\infty$，得

$$< Z_t, \Psi > = \iint_{Q_T} [\varepsilon LZ - \alpha Z\times(Z\times LZ) + \beta Z\times LZ + f(x,t,Z)\cdot \Psi dxdt \tag{13}$$

下面我们来提高 Z_t 的正则性。根据(13)式，采用类似于引理 2.3 的证明，得

$|< Z_t, \Psi >| \leqslant K_{20}\|\Psi\|_{L^p(Q_T)}$，对任意 $\Psi\in L^p(0,T;\ H_0^1(\Omega))$

因为，对任意 $\Psi(x,t)\in L^p(Q_T)$，存在 $\varphi_m(x,t)\in C^\infty_{0(Q_T)}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_m(x,t)-\Psi(x,t)\|_{L^p(Q_T)}=0$$

于是可得

$$|< Z_t, \varphi_m-\varphi_l >| \leqslant K_{20}\|\varphi_m-\varphi_l\|_{L^p(Q_T)}$$

从而知，$\{< Z_t, \varphi_m >\}$ 是 *Cauchy* 序列，所以 $\lim\limits_{m\to\infty}< Z_t, \varphi_m >$ 存在，且不依赖于 $\{\varphi_m(x,t)\}$ 的选取，记 $\lim\limits_{m\to\infty}< Z_t, \varphi_m > = u(\Psi)$ 易知，$|u(\Psi)|\leqslant K_{20}\|\Psi\|_{L^p(Q_T)}$，因此 $u(\Psi)$ 是 $L^p(Q_T)$ 上的有界线性泛函，所以存在 $u^*(x,t)\in L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)$，使

$$u(\Psi)=\iint_{Q_T} u^*(x,t)\Psi(x,t)dxdt,\ \text{对任意}\Psi\in L^p(Q_T)$$

又有 $$< Z_t, \Psi > = \iint_{Q_T} u^*(x,t)\Psi(x,t)dxdt,\ \Psi\in L^p(0,t;\ H_0^1(\Omega))$$

由广义函数的表示定理，知 $Z_t = u^*(x,t)\in L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)$。至此，完成了定理 2.1 的证明。

3　问题$(1)_\varepsilon$、(2)、(3)($\varepsilon>0$)的解$Z^\varepsilon(x,t)$当$\varepsilon\to0$时的极限

记 $Z^\varepsilon(x,t)$ 是问题 $(1)_\varepsilon$、(2)、(3) 的整体强解，利用前面的估计方法，易得

引理3.1.设定理2.1的条件满足，则成立

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z^\varepsilon(x,t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon}\|LZ^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} + \sqrt{\alpha}\|Z^\varepsilon\times LZ^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \leqslant C_4 \tag{4}$$

$$\|Z_t^\varepsilon\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)}\leqslant C_5 \tag{15}$$

其中常数$C_4=C_4(T)$，$C_5=C_5(\alpha,\ T)$。

由估计式(14)、(15)，利用紧致性原理和 $Z^\varepsilon(x,t)$ 所满足的关系式，令 $\varepsilon\to0$，得

定理 3.1. 设定理 2.1 的条件满足，则对旋方程组 $(1)_\varepsilon$、(2)、(3)($\varepsilon>0$, $\alpha>0$) 的整体强解 $Z^\varepsilon(x,t)$，存在 $Z^{(\alpha)}(x,t)\in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega))$，$Z^{(\alpha)}\times LZ^{(\alpha)}\in L^2(Q_T)$，$Z_t^{(\alpha)}\in L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$Z^\varepsilon(x,t)$在$L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega))$中强收敛于$Z^{(\alpha)}(x,t)$，

$\nabla Z^\varepsilon(x,t)$ 在 $L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega))=(L^1(0,T;\ L^2(\Omega))^*$ 弱*收敛于 $\nabla Z^{(\alpha)}(x,t)$，

$Z^\varepsilon\times LZ^{(\varepsilon)}$在$L^2(Q_T)$中弱收敛于$Z^{(\alpha)}\times LZ^{(\alpha)}$，

$Z^\varepsilon\times(Z^\varepsilon\times LZ^\varepsilon)$在$L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)$中弱收敛于$Z^{(\alpha)}\times(Z^{(\alpha)}\times LZ^{(\alpha)})$，

$f(x,t,Z^\varepsilon)$ 在 $L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)$ 中弱收敛于 $f(x,t,Z^{(\alpha)})$，$Z_t^\varepsilon(x,t)$ 在 $L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)$ 中弱收敛于 $Z_t^{(\alpha)}(x,t)$。且 $Z^{(\alpha)}(x,t)$ 是问题 (1)(2)(3) 的整体强解。

4 当 $\alpha\to 0$ 时，$Z^{(\alpha)}(x,t)$的收敛性

本节中，我们考虑铁磁链方程组
$$Z_t=\beta Z\times LZ+f(x,t,Z) \tag{16}$$
初边值问题(2)、(3)整体弱解的存在性。

由前面的结果，得

引理 4.1 设定理 3.1 的条件满足，$Z^{(\alpha)}(x,t)$ 是问题 (1)(2)(3) 的整体强解，则有
$$\sup_{0\le t\le T}\|Z^{(\alpha)}(0,t)\|_{H_0^1(\Omega)}+\sqrt{\alpha}\|Z^{(\alpha)}\times LZ^{(\alpha)}\|_{L^2(Q_T)}\le C_6 \tag{17}$$
其中C_6为不依赖于α的常数。

引理4.2.设引理4.1的条件满足，$\Omega\subset R^n$，$n=1$，则
$$\|Z_t^{(\alpha)}\|_{L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))}\le C_7 \tag{18}$$
其中C_7为不依赖于α的常数。

引理4.3 设引理4.2的条件满足，则有
$$\|Z^{(\alpha)}(\cdot\ t_2)-Z^{(\alpha)}(\cdot\ t_1)\|_{L^2(\Omega)}\le C_8|t_2-t_1|^{\frac{1}{4}} \tag{19}$$
其中C_8为不依赖于α的常数。

定义 4.1 称三维向量值函数 $Z(x,t)$ 为问题 (16)，(2)、(3) 的整体弱解，若
$$Z(x,t)\in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)),\ Z_t\in L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$$
且对任意$\Psi(x,t)\in L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega)$，成立
$$(Z_t,\Psi)=\iint_{Q_T}[-\beta\sum_{i,j=1}^n\Psi_{x_i}(Z\times a_{ij}Z_{x_j})+\Psi\cdot f]dxdt \tag{20}$$
并且 $Z(x,0)=\varphi(x)$，在$L^2(\Omega)$中

其中< · ,· > 表示$L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$与$L^2(0,T;\ H^1_0(\Omega))$之间的对偶。

由估计式(17)、(18)、(19)利用紧致性原理及$Z^\alpha(x,t)$所满足的关系式，令$\alpha\to 0$，得$Z^{(\alpha)}(x,t)$的极限函数$Z(x,t)$是问题(16)、(2)、(3)的整体弱解。

定理 4.1　假设条件，(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)成立，且$\Omega\subset R^n$，$n=1$，则问题(16)、(2)(3)存在整体弱解

$$Z(x,t)\in L^\infty(0,T;\ H^1_0(\Omega)),\quad Z_t(x,t)\in L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$$

$$Z(x,t)\in C^{(0,\frac{1}{4})}(0,T;\ L^2(\Omega)),\ \Omega\subset R^1.$$

参　考　文　献

1 Zhou Yulin and Guo Boling, Existence of weak Solution for boundary problems of systems of ferro–magnetic chain, Scientia Sinica (Ser.A)27, 1984, 799–811.

2 Zhou Yulin and Guo Boling, The weak solution of homogeneous boundary value problem for the systems of ferro–magnetic chain with several variables, Scientia Sinica (Ser.A) 30(1987) 1251–1266.

3 Liang Jin, The Spin wave system in ferromagnetic lattics, J.PDE, 2(1)(1989), 31–39.

4 Zhou Yulin, Guo Boling and Tan Shaobin, The existence and uniqueness of smooth Solution for the system of ferro–magnetic Chain, Scientia Sinica (Ser.A), 3, (1990), 247–259.

5 Tan Shaobin. On the generalized system of ferromagnetic chain with Gilbert damping terin, J.PDE.,4(1)(1991), 1–17.

6 Lady zhenskaya, O.A., N.N.Vralstseva. 线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1987, 283–288.

7 谭绍缤，带Giblet 耗散项Landau–Lifshitz 方程组的有限差分解,应用数学，1991, 4(2), 35–41.

The Global Strong Solution of Intial Boundary Problem for the System of Ferro–magnetic with Several Variales

Wang Shulin　(Zhengzhou Institute of Technology)

Xing Jiashen　(Zhengzhou University)

Abstract: In this paper we study the initial boundary problem for the system of ferro–magnetic with Gilbert term in several variales. Under proper conditions, we give the existence of the global strong solution by means of the Galerkin mothod and the compactness theory.

Keywords: Gilbert term, ferro–magnetic system, global strong solution, global weak solution, Galerkin mothod.