母函数及其在离散控制系统中的应用*

沈宪章 沈海华

(郑州工学院计算机与自动化系 450002) (郑州工业高等专科学校 450007)

摘 要: 离散控制系统广泛地应用于生产实践中。本文提出了一种求解离散控制系统数学模型的新方法——母函数法。这种方法既可以解决线性定常离散系统的问题，也可以部分解决非线性离散系统的问题，它可以作为常规使用的迭代法和Z变换法的扩展与补充。

关键词: 母函数，离散系统，数学模型，差分方程
中图分类号: TP237

控制系统按其各部分间传递信号的特点可分为连续控制系统和离散控制系统。随着数字计算机控制应用的日益广泛，越来越多的系统采用离散控制系统。离散控制系统的数学模型一般采用差分方程或其变型Z传递函数。求解离散系统的问题往往可以转化为求解差分方程的问题.目前常用的求解差分方程的方法一般有两种:迭代法和Z变换法[1, 2, 3]。这两种方法都存在一定的局限性。迭代法求得的解的形式通常是开放式的，而不容易求得解的闭合形式。Z变换法仅仅可以解决线性定常离散系统的问题，而不能解决非线性系统的问题。本文提出了一种解决离散控制系统的新方法—母函数法。这种方法既可以解决线性定常离散系统的问题，也可以部分解决非线性离散系统的问题，而且所得解的形式是闭合式的。

1 母函数的定义及其运算

先给出母函数的定义

定义 1 设$\{a(n)\}$是一给定的脉冲数列，则形式幂级数

$$f(x)=a(0)+a(1)x+a(2)x^2+\cdots+a(n)x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n$$

称为脉冲数列$\{a(n)\}$的母函数。

* 收稿日期: 1995-05-03

下面定义形式幂级数的相等、和、差、数乘、积、商和开方等运算。

定义 2 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n$，$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n$，$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)x^n$是三个形式幂级数

1° $f(x)=g(x)$，若对于任意的$\forall n\in N$，$a(n)=b(n)$

2° $f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[a(n)\pm b(n)]x^n$

3° $h(x)=\alpha f(x)$，若对于任意的$\forall n\in N$，$c(n)=\alpha a(n)$

4° $f(x)\cdot g(x)=h(x)$，若$c(n)=\sum_{k=0}^{n}a(k)b(n-k)$

5° 若$f(x)\cdot h(x)=g(x)$，则定义 $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$

6° 若$f^2(x)=g(x)$，则定义$f(x)=\sqrt{g(x)}$

其中N为非负整数集。

2 母函数在离散控制系统中的应用

正如拉普拉斯变换是解决线性定常连续系统问题的工具一样，母函数是处理线性定常离散系统的有用工具。母函数有时也还能解决一些非线性离散系统的问题。下面举例说明。

例 1 某线性二阶离散控制系统的数学模型如下

$$c(n+2)+0.7c(n+1)+0.1c(n)=r(n) \tag{1}$$

该系统输入为0，即$r(n)\equiv 0$，初始状态$c(0)=0$，$c(1)=0.3$，试用母函数求系统的输出$c(n)$。

解 设$h(x)=c(0)+c(1)x+c(2)x^2+\cdots+c(n)x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)x^n$

用x^{n+2}乘(1)式两端，然后把两端从$n=0$到$n=\infty$求和，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}c(n+2)x^{n+2}+0.7\sum_{n=0}^{\infty}c(n+1)x^{n+2}+0.1\sum_{n=0}^{\infty}c(n)x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}r(n)x^{n+2}$$

∵ $r(n)\equiv 0$ 故

$$h(x)-c(0)-c(1)x+0.7x[h(x)-c(0)]+0.1x^2h(x)=0$$

$$h(x)=\frac{0.3x}{1+0.7x+0.1x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}[(-0.2)^n-(-0.5)^n]x^n$$

∴ $c(n)=(-0.2)^n-(-0.5)^n \qquad n=0,1,2,\cdots$

由解可知该系统稳定，并且当$n\to\infty$时，系统的零输入响应$c(n)$振荡衰减至0。

例 2 某线性离散控制系统的数学模型如下

$$c(n+1)-0.1c(n)=r(n) \tag{2}$$

试求下列情况下之输出$c(n)$。

1° 初始状态$c(0)=0$，输入$r(n)=1$，$(n=0,1,2\cdots)$

2° 初始状态$c(0)=1$，输入$r(n)=1$，$(n=0,1,2\cdots)$

解　设　$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)x^n$

用　x^{n+1}乘(2)式两端，然后把两端从$n=0$到$n=\infty$求和，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}c(n+1)x^{n+1}-0.1\sum_{n=0}^{\infty}c(n)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}r(n)x^{n+1}$$

故　$[h(x)-c(0)]-0.1xh(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}r(n)x^n$

1°　$\because$　$c(0)=0,\quad r(n)=1\qquad\qquad(n=0,1,2,\cdots)$

$$\therefore\quad h(x)-0.1xh(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$h(x)=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1}{1-0.1x}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{10}{9}-\frac{10}{9}(0.1)^n]x^n$$

$$\therefore\quad c(n)=\frac{10}{9}-\frac{10}{9}(0.1)^n\qquad\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

2°　$\because$　$c(0)=1,\quad r(n)=1,\qquad\qquad(n=0,1,2,\cdots)$

$$h(x)-1-0.1xh(x)=\frac{x}{1-x}$$

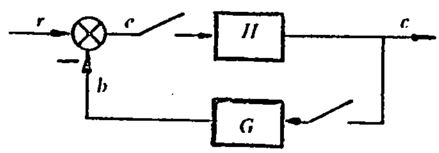
$$h(x)=\frac{1}{1-0.1x}\cdot\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{10}{9}-\frac{1}{9}(0.1)^n]x^n$$

$$\therefore\quad c(n)=\frac{10}{9}-\frac{1}{9}(0.1)^n\qquad\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

例 3　某闭环离散系统的方框图如下图所示

其数学模型为

$$\begin{cases}c(n+1)-0.2c(n)=-0.01e(n)\\ b(n+1)-0.4b(n)=-c(n)\\ e(n)=r(n)-b(n)\end{cases}$$



已知初始状态为$c(0)=0$，$b(0)=1$。

试求该系统零输入，即$r(n)\equiv 0$ 时的输出$c(n)$。

解　$\because r(n)\equiv 0\qquad\therefore\quad e(n)=-b(n)$

$$\therefore\quad\begin{cases}c(n+1)-0.2c(n)-0.01b(n)=0 & (3)\\ b(n+1)-0.4b(n)+c(n)=0 & (4)\end{cases}$$

设　$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)x^n$，　$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n$

由(3)式

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n+1)x^{n+1} - 0.2\sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^{n+1} - 0.01\sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^{n+1} = 0$$

$$[h(x) - c(0)] - 0.2[xh(x)] - 0.01[xg(x)] = 0$$

$$g(x) = \frac{1-0.2x}{0.01x}h(x)$$

由(4)式

$$\sum_{n=0}^{\infty} b(n+1)x^{n+1} - 0.4\sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^{n+1} = 0$$

$$[g(x) - b(0)] - 0.4[xg(x)] + xh(x) = 0$$

$$(1-0.4x)g(x) + xh(x) = 1$$

$$h(x) = \frac{0.01x}{1-0.6x+0.09x^2} = \frac{0.01x}{(1-0.3x)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 0.01n(0.3)^{n-1} \cdot x^n$$

$$\therefore \quad c(n) = 0.01n(0.3)^{n-1} \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

可以验证，以上三例结果与用 Z 变换法计算结果完全一致。

例 4 某非线性离散系统的数学模型为

$$c(n) = \sum_{k=1}^{n-1} c(k) \cdot c(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} r(k)$$

试求初始状态$c(0)=0$，$c(1)=0.1$，零输入$r(n)\equiv 0$ 时的解$c(n)$。

解 首先，设

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) \cdot x^n = c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)x^n$$

则 $$h^2(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c(n)x^n\right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1} c(k) \cdot c(n-k)\right]x^n$$

$$\because \quad r(n) \equiv 0$$

$$\therefore \quad c(n) = \sum_{k=1}^{n-1} c(k) \cdot c(n-k)$$

用 x^n 乘上式两端，然后从 $n=2$ 到 $n=\infty$ 求和，则

$$\sum_{n=2}^{\infty} c(n)x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1} c(k) \cdot c(n-k)\right]x^n$$

$$\therefore \quad h(x) - c(1)x = h^2(x)$$

$$h^2(x) - h(x) + 0.1x = 0$$

$$h_1(x) = \frac{1+\sqrt{1-0.4x}}{2}, \qquad h_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-0.4x}}{2}$$

因为 $h_1(0)=1$，$h_2(0)=0$，而所设的 $h(x)$ 满足 $h(0)=0$

$$\therefore \quad h(x)=h_2(x)$$

$$h(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-0.4x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0.1^n}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}x^n$$

$$\therefore \quad c(n)=\frac{0.1^n}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

3 结论

通过以上分析和举例，可得以下结论

3.1 母函数是求解线性常系数差分方程的有效工具。它既可以求得零输入响应，又可以求得零状态响应，还可以得到非零输入、非零状态共同作用下的系统响应。它既适用于求解开环离散系统，又适用于求解闭环离散系统。

3.2 与迭代法相比，母函数法求得的差分方程的结果是闭合式的。

3.3 与Z变换法相比，母函数法除了可以解决线性定常离散系统的问题外，还可以部分解决非线性离散系统的问题。

3.4 对于解决离散系统问题而言，母函数法是对常规使用的迭代法和Z变换法的扩展与补充。

参 考 文 献

1 绪方胜彦著.卢伯英等译.现代控制工程. 北京.科学出版社.1978

2 蔡尚峰主编.自动控制理论.北京.机械工业出版社.1981

3 孙杨声主编.自动控制理论.北京.水利电力出版社.1986

Generating Function and Its Application to Discrete−Data Control Systems

Shen Xianzhang (Zhengzhou Institute of Technology) (Dept. of Computer of AuTo.

Shen Haihua (Zhengzhou Technology College)

Abstract: This paper introduces a new method of solving mathematical models of discrete−data control systems—generating function. The method may solve not only the problems of linear time−invariant discrete−data systems, but also in part the problems of nonlinear systems. It is a supplement to iteration and Z−transform ordinarily applied to discrete−data systems.

Keywords: Generating function, Discrete−data systems, Mathematical model, Difference equations