第17卷 第1期　　郑州工学院学报　　Vol.17 No.1
1996年 3 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Mar. 1996

确定性参数摄动与随机参数摄动的区别与联系*

李 杰

(郑州工学院土木建筑工程系 450002)

摘 要: 摄动有限元方法是随机结构分析的基本手段之一. 然而对于随机参数摄动与确定性参数摄动的区别与联系的讨论还很少有文献论及. 本文尝试进行了这一方面的工作. 文中定义了随机摄动解答的具有 M 阶精度的渐近展开式的概念. 并通过讨论, 指出了摄动有限元法的可能研究方向.

关键词: 摄动法; 随机结构; 结构分析

中图分类号: TU311

1 前言

工程结构的力学分析模型是对结构系统原型的一种反映. 当这种反映仅把握结构参数的主导特征（如均值参数或设计参数）时, 相应的模型一般为确定性分析模型. 而若要求这种反映同时把握实际工程结构参数的变异特征, 则一般采用随机结构模型. 随机结构分析是针对随机结构模型的分析, 这种分析可追朔至六十年代中期. 七十年代以来, 以摄动法思想为核心, 发表了大量研究文献[1][4], 从而形成了摄动有限元的研究方向. 然而, 非常有趣的是, 尽管人们都在引用摄动法的基本思想, 但对随机参数摄动与确定性参数摄动这两类性质不同的摄动方法的区别与联系却讨论甚少, 以至于在一些研究文献中, 出现将两者混为一谈或以其中一种代替另一种的误解. 在另一方面, 尽管确定性参数摄动在近三十年来的研究中取得了一系列新的研究进展[2][3], 然而摄动有限元方法的研究工作却仍然囿于类似于确定性参数摄动的正则摄动思想范围内. 基于这种背景, 本文试图从对上述两类摄动方法的讨论入手, 探讨确定性参数摄动与随机参数摄动之间的区别与联系.

* 国家教委留学回国人员基金项目. 项目编号: 1995135
收稿日期: 1995-05-25

2　确定性参数摄动

在确定性参数摄动方法中，物理问题的控制方程表现为含有小参数的方程：

$$L(v,\ x,\ \varepsilon)=0 \tag{1}$$

其中：L 为一般线性算子，U＝U(x, ε)为物理问题的解；x 为自变量；ε是一个小参数，它可以自然地出现在方程(1)中，也可以人为地引入。

一般说来，上述问题往往不能精确地解出，但根据解答 U 为 x 和 ε的函数以及ε是小参数的特点，可以用关于ε的一个渐近展开式表示 u，例如可取

$$U(x,\ \varepsilon)=U_o(x)+\varepsilon U_1(x)+\cdots\varepsilon^n U_n(x)+\cdots \tag{2}$$

其中系数$U_i(x)$与ε无关。

将上述展开式代入(1)，并将关于ε的同次幂系数合并起来，则可给出：

$$(L_oU_o-h)+(L_oU_1+L_1U_o)\varepsilon+(L_oU_2+L_1U_1+L_2U_o)\varepsilon^2+\cdots=0 \tag{3}$$

式中 L_o，L_1，$L_2\cdots$ 为空间 U 中的线性算子，h 为关于 x 的实函数，可据具体问题确立它们的形式。

由于上述方程必须对所有ε值成立，又因为ε的序列是线性无关的，故ε的各次幂的系数项必然各自为零，即有

$$\left.\begin{aligned} L_oU_o&=h\\ L_oU_1&=-L_1U_o\\ L_oU_2&=-L_1U_1-L_2U_o \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

上述方程组构成关于 $U_i(x)$ 的递推方程组。按类似方法可以获取问题的边界条件或初始条件，据此，逐次求解上述方程，即可求得 $U_i(x)$，各结果代回(2)，即得 $U(x,\ \varepsilon)$ 的一个近似结果。

这种基于解答的小参数渐近展开式求问题近似解的方法，一般称为参数摄动方法。在参数摄动中，被展开的量也可以是除摄动参数外的一个或几个变量的函数。在直接展开中，一般取函数列 $\delta_i(\varepsilon)$作为展开的渐近序列。这一渐近序列定义为

$$\delta_i(\varepsilon)=O[\delta_{i-1}(\varepsilon)] \qquad (\varepsilon\to 0) \tag{5}$$

用文字描述即为：渐近序列的后项必为前项的高阶小量。例如：当 ε→0 时，

$$\varepsilon^i,\qquad \varepsilon^{\frac{i}{3}},\qquad (\log\varepsilon)^{-i},\qquad (\sin\varepsilon)^i$$

等皆为渐近序列。

在摄动法中，可以一般地将未知函数 $U(x,\ \varepsilon)$ 表达为如下函数

$$U(x,\ \varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x)\delta_i(\varepsilon) \qquad (\varepsilon\to 0) \tag{6}$$

其中a_i仅为x的函数且与ε无关。

若对于任意正整数N，存在

$$U(x,\ \varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}a_i(x)\delta_i(\varepsilon)+R_N(x,\ \varepsilon) \tag{7}$$

其中$R_N(x,\ \varepsilon)$为余项

$$R_N(x,\ \varepsilon)=O[\delta_N(\varepsilon^{N+1})] \quad .(\varepsilon\to 0) \tag{8}$$

则称（7）右端为U(x, ε)的N次渐近展开式。

设考虑问题的定义域为Ω，边界为D，则若渐近展开式（7）在Ω+D上恒成立，即摄动问题解在有意义的x定义域内存在关于x一致收敛的极限，则称此展开式为Ω+D上的一致有效渐近展开式。此时的摄动问题称为正则摄动问题。由于$\delta_i(\varepsilon)$为渐近序列，正则摄动意味着无论x为何值，$a_i(x)\delta_i(\varepsilon)$是对其前项的小量修正。这一条件，并不是对所有按参数展开的摄动问题都满足的。摄动问题解不能一致收敛的区域称为非一致区域。存在非一致区域的摄动问题称为奇异摄动问题。相应地称展开式（7）为非一致有效渐近展开式。在确定性分析问题中，非一致性的主要来源是：无限域中的久期项、奇点的存在、小参数与高阶导数相乘等。使非一致有效展开式变换为一致有效展开式的技术称之为奇异摄动技术，一般有渐近方法[2]和数值方法两大类[3]。

3 随机参数摄动

将上述摄动概念推广到含随机参数的问题中来，就构成所谓随机参数摄动问题，为此，设所考虑问题的随机微分算子方程为

$$L(y,\ x,\ \zeta)=0 \tag{9}$$

其中L,，x含义同(1)式；而ζ则为某一给定分布的随机变量。

根据概率论的知识，随机变量可以转化为用标准化随机变量表示的形式：

$$\zeta=\zeta_o+\zeta_r b=\Psi(b) \tag{10}$$

其中，ζ_0为ζ的均值，ζ_r为ζ的均方差，b为均值为零，方差为1的标准化随机变量。

将式(10)代入(9)有

$$L[y,\ x,\ \Psi(b)]=0 \tag{11}$$

利用随机函数的幂级数展开概念，可将解答y(x, ζ)展开为b的级数：

$$y(x,\ \zeta)=y[x,\ \Psi(b)$$

$$=y[x,\ \Psi(\bar{b})]+\frac{dy}{db}\Big|_{b=0}b+\frac{1}{2}\frac{d^2y}{db^2}\Big|_{b=0}b^2+\cdots \tag{12}$$

由于y未知，所以系数项$\frac{dy}{db}\big|_{b=0}$等是未知的，但可将上式等价地写为：

$$y(x,\ S)=U_o(x)+bU_1(x)+b^2U_2(x)+\cdots \tag{13}$$

显然，系数$U_i(x)$与b无关，为一确定性函数。

将展开式(13)代入式(11)，经适当运算后将b的同次幂系数合并起来，则可给出：

$$(L_0U_0-h)+(L_0U_1+L_1U_0)b+(L_0U_2+L_1U_1+L_2U_0)b^2+\cdots=0 \tag{14}$$

式中，L_0，L_1，$\cdots$ 为确定性算子，h 为关于 x 的实函数，它们都可以由具体问题决定其形式。

由于随机变量 b 的任意性，因此，式(13)成立的充分条件是各系数项皆为零，由此给出:

$$\left.\begin{aligned} &L_0U_0=h \\ &L_0U_1=-L_1U_0 \\ &L_0U_2=-L_1U_1-L_2U_0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

上述方程组为一组确定性算子方程，当给定边界条件或初始条件之后，便可逐次求出解答 U_0，U_1，$\cdots$。代回式(13)即给出 $y(x,\ \zeta)$的形式解答，而解答的均值与方差分别为:

$$E[y(x,\ \zeta)]=U_0(x)+U_2(x)+\cdots \tag{16}$$

$$D[y(x,\ \zeta)]=U_1^2(x)+U_2^2(x)+\cdots \tag{17}$$

与确定性参数摄动问题直接考虑解的收敛性的思想不同，在随机参数摄动中，考虑的是解的数值特征的收敛性，设 $S_M[U_N(x,\ S)]$为展开至 b 的 N 次幂的解答的 M 阶数字特征值，则若有:

$$S_M[y_{N+1}(x,\ \zeta)]-S_M[y_n(x,\ \zeta)]+O_M(x) \tag{18}$$

则称 $y_N(x,\ S)$为具有 M 阶精度的 N 次渐近展开式。上式中 O_Mx 表示 $y(x,\ \zeta)$按 N 次展开的 M 阶数字特征的余项为一高阶小量。

若式(8)在 x 全部有意义的定义域内成立，则称相应的展开式在 M 阶精度下为一致有效渐近展开式。反之，若存在使式(18)不收敛的区域，则相应的展开式在 M 阶精度下为非一致有效渐近展开式，与前者相应的摄动问题可称为具有 M 阶精度的正则摄动问题，与后者相应的摄动问题可称为在 M 阶精度条件下的奇异摄动问题。

4　联系与区别

从上述分析可见，确定性参数摄动理论与随机参数摄动理论既有类似之处又有本质上的区别。其类似之处在于都是通过构造解答的某一类渐近展开式使原问题转化为递推方程组求解问题。其区别点表现在:

(1)确定性参数摄动理论建立于渐近序列的概念之上，而对随机参数摄动则不存在这一概念;

(2)随机参数摄动以解答的数字特征收敛为标准，因此有所谓 M 阶精度的概念，而确定性参数摄动则没有这一概念;

(3)确定性参数摄动理论研究的主体是奇异摄动理论，而随机参数摄动理论研究则尚限于具有 M 阶精度的正则摄动问题。因此，当存在非一致有效区域时，确定性参数摄动技术已发展了各种各样的奇异摄动技术（如匹配展开方法、多重尺度方法、迎风有限元方法等），而随机参数摄动技术则对此研究甚少。

借鉴于确定性参数的奇异摄动技术，有可能使摄动有限元方面的研究领域得以拓宽。例如，在二阶精度意义下研究动力问题的久期项问题，有可能借助于平均法得到改进的摄动有限元解答。

4 结语

确定性参数摄动与随机参数摄动是两类不同性质的问题。摄动有限元方法在随机结构的静力分析中，取得了巨大的成功。然而在随机结构的动力分析中，却因久期项问题的干扰而困扰不前。在这种背景下，引用本文建议的 M 阶精度的渐近展开式的概念，有可能借助于在确定性参数摄动中发展起来的奇异摄动技术，使随机结构的基于摄动法的动力分析乃至非线性分析取得进一步进展。

参考文献

1 Kleiber, M. &Hien, T.D., The stochostic finite element method: basic perturbarion technique and computer implementation. J. Wiley Press, 1992.

2 A.H.奈弗著.摄动方法.上海科学技术出版社.1984年.

3 苏煜城.吴启光著.奇异摄动问题数值方法引论.重庆出版社.1991年.

4 李杰.随机结构系统理论—分析、建模与应用、研究生讲义.1994年.

A Discussion on the Difference and Relationship Between Deterministic Parameter Perturbation and Random Parameter Perturbation

Li Jie

(Zhengzhou Institute of Technology Dept. Civil Eng.)

Abstract: The finite element based perturbation method is a basic technology for stochastic structural analysis. However, there is seldom research focusion on the deference between deterministic parameter perturbation and random parameter perturbation. This paper supplies some notation on the problem. The idea of gradually expansion based on the M'th precision is defined. According to detailed discussion, some potential developing directions are pointed.

Keywords: perturbation method, stochastic structures, analysis