第16卷 第4期 郑 州 工 学 院 学 报 Vol.16 No.4
1995年 12 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Dec. 1995

逆矩阵中若干问题的研究*

陈建梅 张长春 张国强

(郑州工学院数力系) (安阳大学) (郑州工学院数力系)

摘 要: 本文首先利用两矩阵的乘法及其相等的定义和克莱姆法则，对 $AB=BA=E$ = $AB=E$（或 $BA=E$）进行了证明。其次将逆矩阵的定义 $AB=BA=E$ 简化为 $AB=E$（或 $BA=E$）后，又证明了逆矩阵存在的必要充分条件及唯一性。

关键词: 复方阵，两矩阵的乘法及相等，转置矩阵，克莱姆法则、逆矩阵，行列式

中图分类号: O151

1 关于 AB＝BA＝E ⇔ AB＝E 的证明

结论 1: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且为复方阵，若存在 n 阶复方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则 $AB=BA=E \Leftrightarrow AB=E$.

证明:（1）$AB=BA=E \Rightarrow AB=E$，显然成立.

（2）$AB=E \Rightarrow AB=BA=E$，即 $AB=E \Rightarrow BA=E$ 的证明。

证法一: 因为 $AB=E$，所以 $A(BA)=(AB)A=EA=A$ 且 $\det(A)\neq 0$。

令 $BA=(x_{ij})_{n\times n}$，则 $(a_{ij})_{n\times n}(x_{ij})_{n\times n}=(a_{ij})_{n\times n}$

由两矩阵的乘法及其相等的定义得

$$(a_{ij})_{n\times n}\begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \cdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} \qquad k=1、2、\dots，n$$

由 $det(A)\neq 0$ 及克莱姆法则解得

$$(x_{ij})_{n\times n}=E$$

* 收稿日期: 1995-02-23

即$BA=E$

证法二：因为$AB=E$，所以

$A(BA)=(AB)A=A=AE$且$det(A)\neq 0$

即　$A(BA-E)=0$　且$det(A)\neq 0$

令　$BA-E=(y_{ij})_{n\times n}$，则

$$(a_{ij})_{n\times n}(y_{ij})_{n\times n}=(0)_{n\times n}$$

由两矩阵的乘法及其相等的定义得

$$(a_{ij})_{n\times n}\begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \cdots \\ y_{nk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

由$det(A)\neq 0$及克莱姆法则解得

$$(y_{ij})_{n\times n}=(0)_{n\times n}$$

即$BA-E=0$

也就是$BA=E$，证明完毕。

2　关于 $AB=BA=E \Leftrightarrow BA=E$ 的证明

结论 2：设，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，且为复方阵，若存在 n 阶复方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则 $AB=BA=E \Leftrightarrow BA=E$

证明：(1) $AB=BA=E\Rightarrow BA=E$，显然成立.

(2) $BA=E\Rightarrow AB=BA=E$，即 $BA=E\Rightarrow AB=E$ 的证明.

证法一：因为 $BA=E$，所以 $(AB)A=A(BA)=AE=A$，且 $\det(A)\neq 0$

令　$AB=(c_{ij})_{n\times n}$，则

$$(c_{ij})_{n\times n}(a_{ij})_{n\times n}=(a_{ij})_{n\times n}，则$$

由两矩阵的乘法及其相等的定义得

$$[c_{k1}c_{k2}\cdots c_{kn}]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=[a_{k1}\quad a_{k2}\quad \cdots\quad a_{kn}]$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

由　$\det(A^T)=\det(A)\neq 0$ 及克莱姆法则解得

$$(c_{ij})_{n\times n}=E$$

即　$AB=E$

证法二：因为 $BA=E$，所以 $(AB)A=A(BA)=AE=EA$，且 $\det(A)\neq 0$

即　$(AB-E)A=0$ 且 $\det(A)\neq 0$

令　$AB-E=(z_{ij})_{n\times n}$

则　$(z_{ij})_{n\times n}(a_{ij})_{n\times n}=(0)_{n\times n}$

由两矩阵的乘法及其相等的定义得

$$(z_{k1}\ \ z_{k2}\ \cdots z_{kn})\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=(0\ \ 0\ \ \cdots 0)$$

$k=1, 2, \ldots, n$

由 $\det(A^T)=\det(A)\neq 0$ 及克莱姆法则解得

$(z_{ij})_{n\times n}=(0)_{n\times n}$

即　$AB-E=0$，亦即 $AB=E$。

证法三：因为 $BA=E$，所以 $(AB)A=A(BA)=A$ 且 $\det(A)\neq 0$

故有 $A^T(AB)^T=A^T$　且 $\det(A)^T\neq 0$

由此可得（如采用与结论 1 中证法一的证法）　$(AB)^T=E$

故　$AB=E$

证法四：因为 $BA=E$，所以 $(AB)A=A(BA)=AE=EA$，且 $\det(A)\neq 0$

即　$(AB-E)A=0$，　$\det(A)\neq 0$

故　$A^T(AB-E)^T=0$，　$\det(A^T)\neq 0$

由此可得（如采用与结论 1 中证法二的证法）　$(AB-E)^T=0$

故　$AB-E=0$

亦即 $AB=E$

推论　设 A、B 都是 $n\times n$ 复方阵，则

$AB=E \Leftrightarrow BA=E$

证明　由 $AB=E \Leftrightarrow AB=BA=E \Leftrightarrow BA=E$ 便知推论成立。

3　逆矩阵定义简化后逆矩阵存在的必要充分条件及唯一性

由结论 1，结论 2 可将逆矩阵的下述定义：

定义设 A 为 n 阶复方阵，如果存在一个 n 阶复方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 A 是可逆的，并称 B 是 A 的逆矩阵。

依次分别改为：

设 A 为 n 阶复方阵，如果存在一个 n 阶复方阵 B，使得 $AB=E$，则称 A 是可逆的，并称 B 是 A 的逆矩阵；

设 A 为 n 阶复方阵，如果存在一个 n 阶复方阵 B，使 BA＝E，则称 A 是可逆的，并称 B 是 A 的逆矩阵。

定理一 （逆矩阵存在的必要条件）如果矩阵 B 是矩阵 A 的逆矩阵，则 $\det(A)\neq 0$

定理二 （逆矩阵的存在性及可逆的充分条件）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $\det(A)\neq 0$，则 A 是可逆的，且当 n＝1 时，$(\frac{1}{a_{11}})_{1\times 1}$ 为 A 的一个逆矩阵；当 n＞1 时，$\frac{1}{det(A)}A^{*}$ 为 A 的一个逆矩阵。

定理一、二成立是显然的，证明省略。

定理三 逆矩阵的唯一性。

下面仅对逆矩阵的定义改为 AB＝E（改为 BA＝E 的证法类似）给出两种证法。

证法一 设矩阵 G 为 A 的一个逆矩阵，矩阵 C 为 A 的任意一个逆矩阵，下面只要证明 C＝G 即可。

因为 AG＝E，AC＝E，所以 A（C−G）＝0，而 $\det(A)\neq 0$，所以 C−G＝0，故 C＝G，证毕。

证法二（反证法）如果矩阵 A 的逆矩阵不唯一，则至少存在两个相异的矩阵 B_1，B_2 满足

$$AB_1=E \qquad AB_2=E$$

所以 $A(B_1-B_2)=0$，而 $\det(A)\neq 0$，故 $B_1-B_2=0$，从而有 $B_1=B_2$，此与 $B_1\neq B_2$ 矛盾，所以矩阵 A 的逆矩阵是唯一的。

参考文献

1 复旦大学数学系主编.高等代数.上海科学技术出版社

2 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组编.高等代数.人民教育出版社

3 同济大学数学教研室编.线性代数.高等教育出版社

4 化工系统高校数学协作组编.线性代数.中国计量出版社

5 赵树源编.经济应用数学基础（二）.线性代数.中国人民大学出版社

6 关于$AA^H=A^HA=E$等价$AA^H=E$(或$A^HA=E$)的证明.经济经纬.94.8

Research of Several Questions in Inverse matrix

Chen Jianmei　Zhang Changchun　Zhang Guoqiang

(Zhengzhou Institute of Technology)　(Anyang University)　(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: By using Cramer's rule and definition of matrix multiplication and matrix equality, this paper proves the equivalence of AB＝BA＝E and AB＝E (or BA＝E). After the definition of inverse matrix is modified to AB＝E (or BA＝E), the paper proves the necessary and sufficient condition of inverse matrix's existence.

Keywords: Complex square matrix, transpose matrix, matrix multiplication and matrix equality, Gramer's rule, inverse matrix, determinant