一类非线性特征值问题的周期解*

董立群

(河南省计算中心)

摘 要: 本文讨论一类非线性特征值问题的周期解，从初值条件出发给出了存在周期解的充分必要条件、周期的计算公式、周期的变化范围及周期解的分类。

关键词: 特征值，周期解，最小正周期

中图分类号: O241

形如

$$-u''+u|u|^{q-1}=\lambda u \qquad (q>0) \tag{1}$$

的特征值问题在理论及应用中均有重要价值。关于它有许多方面的讨论。近年来，一些文献从初值条件出发对其周期解做了一些讨论。如文献[1]出于研究一类非线性椭园型方程的“各向异性奇异性”的需要，讨论了 q＞1 时(1)的 2π 周期解的情况。文献[2]对于 0＜q＜1 的情形，完整地讨论了(1)的周期解的情况，给出了从初值条件出发判断周期解的充分必要条件、周期的计算公式、周期的变化范围及周期解的分类。[1][2]运用了一种全新的方法，其与定性理论等方法完全不同。

本文用此方法 q＞1 的情形，完整地讨论了(1)的周期解的分布情况、存在的充分必要条件以及其它有关结果。

1 $\lambda\leqslant 0$ 的情形

我们首先讨论$q>1$，$\lambda\leqslant 0$的情况，为此我们需要如下引理。

引理1. ($Wirtinger$不等式，[3])若f, $f'\in C(a,\ b)$, $f(a)=f(b)$, $\int_a^b f(x)dx=0$, 则有

$$\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\int_a^b [f'(x)]^2dx\geqslant\int_a^b f^2(x)dx \tag{2}$$

从而我们有如下结果。

定理 1.若 $\lambda\leqslant 0$，(1)没有非常数周期解。

* 收稿日期: 1994-12-22

证明.若(1)有非常数周期解 u，以 T 为其最小正周期。

记$g(u)=u|u|^{q-1}$，分别记u，u''，$g(u)$在$[0, T]$上的平均值为$\overline{u}$，$\overline{u''}$，$\overline{g(u)}$。

由(1)得:

$$-\int_0^T (u''-\overline{u''})(u-\overline{u})d\theta+\int_0^T (g(u)-\overline{g(u)})(u-\overline{u})d\theta=\lambda\int_0^T (u-\overline{u})^2 d\theta \tag{3}$$

由于有

$$\int_0^T (g(u)-\overline{g(u)})(u-\overline{u})d\theta=\int_0^T (g(u)-\overline{g(\overline{u})})(u-\overline{u})d\theta$$

及$\int_0^T (u''-\overline{u''})(u-\overline{u})d\theta=-\int_0^T [(u-\overline{u})']^2 d\theta$

由（3）得:

$$\int_0^T [(u-\overline{u})']^2 d\theta+\int_0^T (g(u)-g(\overline{u}))(u-\overline{u})d\theta=\lambda\int_0^T (u-\overline{u})^2 d\theta$$

因为 $g'(r)\geqslant 0$，故 $\int_0^T (g(u)-g(\overline{u}))(u-\overline{u})d\theta\geqslant 0$，由引理 1 得:

$$0\leqslant\int_0^T (u-\overline{u})^2 d\theta\leqslant\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\lambda\int_0^T (u-\overline{u})^2 d\theta\leqslant 0$$

故$u=\overline{u}$，即u为常数，与假设矛盾，故定理得证。

2　$\lambda>0$ 的情形

下面我们讨论 $\lambda>0$ 的情形，得出了一些重要结论。

引理 2.若 $\lambda>0$ 而 u 为(1)的非常数周期解，则存在 $\theta_0\in R'$及 $\alpha\neq 0$ 使得

$$u(\theta_0)=0,\quad u'(\theta_0)=\alpha \tag{4}$$

证明：由于有

$$u''=u|u|^{q-1}-\lambda u=\begin{cases}>0, & -\lambda^{\frac{1}{q-1}}<u<0\\ <0, & 0<u<\lambda^{\frac{1}{q-1}}\end{cases}$$

以及u的周期性与光滑性，易证(4)。

以下记$h(\lambda)\equiv\lambda^{\frac{1}{q-1}}$，$(\lambda>0,\quad q>1)$

引理 3. 若 $\lambda>0$，$\alpha>0$，$\Psi(\alpha, s)=\alpha^2+\frac{2}{q+1}s^{q+1}-\lambda s^2$，$Q^2(\lambda)=\lambda h^2(\lambda)-\frac{2}{q+1}h^{q+1}(\lambda)$，且 $\alpha^2\leqslant Q^2$，则 $\Psi(\alpha, s)$ 关于 s 在 $(0, h(\lambda))$ 中有唯一零点 $s(\alpha)$，且

$$\theta(\alpha)=\int_0^{s(\alpha)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}} \tag{5}$$

有限。

证明：由于 $\Psi(\alpha,\ s)$ 在 $[0,\ h(\lambda)]$ 上关于 s 严格递减，且 $\Psi(\alpha,\ 0)>0$，$\Psi(\alpha,\ h(\lambda))<0$，故 $\Psi(\alpha,\ s)$ 在 $(0,\ h(\lambda))$ 中有唯一零点，记为 $s(\alpha)$。又由于 $\frac{\partial\Psi(\alpha,\ s(\alpha))}{\partial s}\neq 0$，故 (5) 有限。

定理2.若 $\lambda>0$，我们有

(*i*) 初值问题(1)与(4)的解为周期解的充分必要条件为 $\alpha^2<Q^2(\lambda)$。

(*ii*) (1)的任一非常数周期解的最小正周期为 $4\theta(\alpha)$，这里 $\theta(\alpha)$ 由(5)给出。

证明 .(*i*) 若 $\alpha^2<Q^2(\lambda)$，u 为 (1) 与 (4) 的解，不妨设 θ_o，$\alpha>0$，从 (1) 得 $[u'(\theta)]^2=\Psi(\alpha,\ u)$，由引理 3 可知 $u(\theta)$ 在 $[0,\ \theta(\alpha)]$ 上递增且 $u(\theta(\alpha))=s(\alpha)$，$u'(\theta(\alpha))=0$，$u''(\theta(\alpha))<0$，即 $u(\theta)$ 在 $\theta(\alpha)$ 处达到极大值，且在 $[0,\ \theta(\alpha)]$ 上有

$$\theta(\alpha)=\int_o^{u(\theta)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}}$$

进一步，对于 $\varepsilon>0$ 在 $(\theta(\alpha),\ \theta(\alpha)+\varepsilon)$ 中，u 递减，且 $\frac{du}{d\theta}=-\sqrt{\Psi(\alpha,\ u)}$，由于

$$\alpha^2=\lambda s^2(\alpha)-2\frac{s^{q+1}(\alpha)}{q+1} \tag{6}$$

故

$$\theta-\theta(\alpha)=\int_{u(\theta)}^{s(\alpha)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}}$$

若 $\theta_1=\int_o^{u(\theta_1)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}}\in(0,\ \theta(\alpha))$, $\theta_2=2\theta(\alpha)-\theta_1\in(\theta(\alpha),\ \theta_1(\alpha)+\varepsilon)$

则

$$\theta_2-\theta(\alpha)=\int_{u(\theta_2)}^{s(\alpha)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}},\quad 即\ \theta(\alpha)=\theta_1+\int_{u(\theta_2)}^{s(\alpha)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}}$$

$$=\int_o^{u(\theta_1)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}}+\int_{u(\theta_2)}^{s(\alpha)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}}=\int_o^{s(\alpha)}\frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha,\ s)}}$$

此即 $u(\theta_1)=u(\theta_2)$，且 $u(2\theta(\alpha))=0$，$u'(2\theta(\alpha))=-\alpha<0$，故 $2\theta(\alpha)$ 为 u 的最小反周期。(*i*) 的充分性以及 (*ii*) 得征，下面证明 (*i*) 的必要性。

若 $u(\theta)$ 为 (1)、(4) 的周期解，$\alpha^2\geqslant Q^2$，则由于 $\Psi(\alpha,\ s)$ 在 $(0,\ h(\lambda))$ 中严格递减，$\Psi(\alpha,\ h(\lambda))\geqslant 0$，故在 $(0,\ h(\lambda))$ 中有 $\Psi(\alpha,\ s)>0$，故当 $u\in(0,\ h(\lambda))$ 时，$\theta'_u>0$ 即 θ

关于 u 在 $(0, h(\lambda))$ 中严格递增，此与 u 的周期性矛盾，故有 $\alpha^2 < Q^2$.

附注1.(1)、(4)的周期解的最大振幅为$s(\alpha)$。

附注2.周期与振幅的关系由

$$\tau = 4\theta(\alpha) = 4\int_0^{s(\alpha)} \frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha, s)}}$$

给出，这与[4]的结果一致。

定理2.若$\lambda > 0$，则有

(i) 对任意 $T \in (\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}, +\infty)$，存在 (1) 的一个以 T 为最小正周期的周期解族，其中的解在平移变换下恒等。

(ii)(1) 的任一非常数周期解的周期 $T > \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$。

证明: 首先讨论$[0, Q(\lambda))$上的函数$s(\alpha)$，$\theta(\alpha)$。由隐函数定理知

$$\frac{d}{d\alpha}\Psi(\alpha, s(\alpha)) = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\alpha, s(\alpha)) + \frac{d}{d\alpha}s(\alpha)\frac{\partial \Psi}{\partial s}(\alpha, s(\alpha) = 0$$

及

$$\frac{d}{d\alpha}s(\alpha) = \frac{\alpha}{\lambda s(\alpha) - s^q(\alpha)} > 0 \tag{7}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}s(\alpha) = \frac{(\lambda s(\alpha) - s^q(\alpha))^2 - \alpha^2(\lambda - q s^{q-1}(\alpha))}{(\lambda s(\alpha) - s^q(\alpha))^3}$$

令 $\tau(s) = (\lambda s - s^q)^2 - (\lambda s^2 - \frac{2s^{q+1}}{q+1})(\lambda - q s^{q-1})$，$s = s(\alpha)$，因$\frac{d}{ds}\tau(s(\alpha)) = \alpha^2 q(q-1)s^{q-2} \geqslant 0$，$\tau(0) = 0$，故 $\tau > 0$，$s \in [0, Q(\lambda))$ 且$\frac{d^2}{d\alpha^2}s(\alpha) \geqslant 0$，故 $s(\alpha)$ 为 $[0, Q(\lambda))$ 上的递增凸函数且 $s(\alpha) \in C^2$.

对于 $[0, Q(\lambda))$ 上的函数 $\theta(\alpha)$，当 $u \in [0, \alpha]$ 时，$\Psi(u, s)$ 在 $s = s(u)$ 处有零点，且 $\Psi(\alpha, s(u)) = \alpha^2 - u^2$，故

$$\theta(\alpha) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\Psi(\alpha, s)}} = \int_0^\alpha \frac{ds(u)}{du} \cdot \frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} = \int_0^1 \frac{ds}{du}(\alpha\sigma)\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$$

因为$\frac{ds}{du} \in C'$且单调递增，故$\theta \in C'$且单调递增。

经计算可得:

$$\lim_{\alpha \to 0^+} s(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\frac{1}{q+1}s^{q+1}(\alpha)}{s^2(\alpha)} = 0, \quad \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{s(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lim_{\alpha \to 0^+} \theta(\alpha) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}},$$

$$\lim_{\alpha \to Q^{-}(\lambda)} s(\alpha) = s(Q(\lambda)) = h(\lambda),$$

因 $h(\lambda)$ 是 $\Psi(Q(\lambda)\ s)$ 及 $\Psi'_s(Q(\lambda)\ s)$ 的零点，故有连续有界函数 φ 使得

$$Q^2(\lambda) - \lambda s^2 + 2\frac{s^{q+1}}{q+1} = (s(Q(\lambda)) - s)^2 \varphi(s)$$

由(5)有

$$\lim_{\alpha \to Q^{-}(\lambda)} \theta(\alpha) \geqslant \int_0^{s(Q(\lambda))} \frac{ds}{[s(Q(\lambda)) - s]\sqrt{\varphi(s)}} = +\infty$$

故 θ 是 $(0,\ Q(\lambda))$ 到 $(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}},\ +\infty)$ 上的一一映射，从而 4θ 是 $(0,\ q(\lambda))$ 到 $(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}},\ +\infty)$ 的一一映射。由定理 2 及唯一性，易证定理。

推论.(*i*) 若$0 < \lambda \leqslant 1$，(1)无2π周期解

(*ii*) 若$\lambda > 1$，(1)有$F(\sqrt{\lambda})$个2π周期解，其最小正周期分别为$\frac{2\pi}{k}$，$0 < k \leqslant f\sqrt{\lambda})$，$F(\cdot)$为取整函数，$K$为正整数。

(*iii*)(1)的所有周期解在带形区域$|u| < \lim\limits_{\alpha \to Q^{-}(\lambda)} s(\alpha)$中。

参 考 文 献

1 L. Veron, Limit behaviour of singular solutions of some semilinear elliptic equations, Partial diff. eq. Banach Centre Publications, Vol. 19(1987), 311–350.

2 Dong Liqun, Aclass of nonlinear eigenvalue problem for periodic solutions, Chinese Quarterly J. of Math. Vol. 8 No. 1(1993)

3 D.S.Mitrinovitch, Analytic Inequalities, Spring–Verlag, (1970)

4 D.W.Jordan, P. Smith, Nonlinear Ordinary Diferential Equations, Clarendon Press, Oxford, (1977)

The periodic solutions of a Class of Nonlinear Eigenvalue problem

Dong Liqun

(Henan Computer Centre)

Abstract: In this paper, we have discussed the periodic solutions of a class of nonlinear eigenvalue problems and have got a necessary and sufficient condition for the periodic solution from the initial values. We have also got a formula for calculating the periods, the variation range of periods and the classiifcaiton of the periodic solutions.

Keywords: eigenvalue; perildic solution; smallest positive period