稳定问题中能量特征和数学特征的图解表示法*

邓秀泰

(郑州工学院土木建筑工程系)

摘 要: 当研究分支点的失稳时，理论上特征值数与其自由度相同。体系的总势能Π是位移 y 的实对称二次型，可用图解方式明确地表达在不同荷载阶段其能量特征与数学特征一一对应的关系，对二次型的几个定义域赋予明确的物理意义。

关键词: 稳定，特征值，自由度，二次型

中图分类号: O317

在n个自由度体系中势能Π是位移y_1，y_2……y_n的实对称二次型:

$$\Pi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}y_iy_k-p\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{ik}y_iy_k \tag{1}$$

式中 β_{ik}—— 弹性约束的刚度系数，根据反力互等定理 $\beta_{ik}=\beta_{ki}$。

若令 ρ_{ik} 为单位荷载($p_k=1$)在 y_i 上作的功（只与体系的几何性质有关），根据功的互等定理 $\rho_{ik}=\beta_{ki}$。

应用势能驻值条件: $\dfrac{\partial\Pi}{\partial y_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ldots n) \qquad (2)$

建立特征方程

$$\begin{vmatrix}\beta_{11}-p\rho_{11} & \beta_{12}-p\rho_{12} & \cdots\cdots & \beta_{1n}-p\rho_{1n}\\ \beta_{21}-p\rho_{21} & \beta_{22}-p\rho_{22} & \cdots\cdots & \beta_{2n}-p\rho_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \beta_{n1}-p\rho_{n1} & \beta_{n2}-p\rho_{n2} & \cdots\cdots & \beta_{nn}-p\rho_{nn}\end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

解方程可得出n个特征值

$$p_i=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}y_iy_k}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{ik}y_iy_k} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ldots n) \tag{4}$$

* 收稿日期: 1994-12-22

将特征值由小到大排列($p_1 p_2 \cdots p_n$)，其中最小值 p_1 即临界荷载。

对于任意一组不全为零的位移 y_1，y_2，$\cdots y_n$，当 $p< p_1$ 时 Π 为正定的；当 $p= p_1$ 时 Π 为半正定的；当 $p_1< p< p_n$ 时 Π 是不定的；当 $p= p_n$ 时 Π 是半负定的；$p> p_n$ 时 Π 是负定的。对于上述二次型的各个定义域，可以用 Π-p 函数关系图明确地表达出来。为此以具有三个自由度的弹簧支承的刚性杆系（图 1）为例进行讨论。该体系的总势能

$$\begin{aligned}\Pi &= U - p\lambda \\ &= \frac{1}{2l}[(kl-2p)y_1^2 + 2py_1y_2 + (kl-2p)y_2^2 + 2py_2y_3 + (kl-\frac{3}{2}p)y_3^2]\end{aligned} \tag{5}$$

其中：U—弹簧的应变能

$-p\lambda$—荷载势能

纤维素结构（β-1,4 连接）

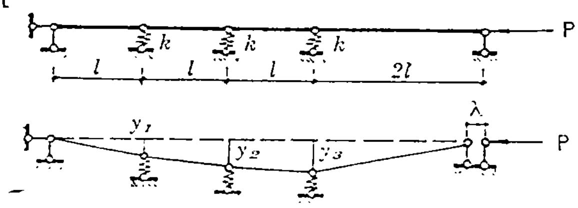

图 1

当取任意不全为零的位移 y_1，y_2 和 y_3 的值时，可得计算特征值的特征方程

$$\begin{vmatrix} (kl-2p) & p & 0 \\ p & (kl-2p) & p \\ 0 & p & (kl-\frac{3}{2}p) \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

此可得3个特征值：$p_1 = 0.3018327kl$　　$p_2 = 0.5689669kl$　　$p_3 = 2.329197kl$

由齐次方程组

$$\left.\begin{aligned} &(kl-2p)y_1 + py_2 = 0 \\ &py_1 + (kl-2p)y_2 + py_3 = 0 \\ &py_2 + (kl-\frac{3}{2}-p)y_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

可得到与各特征值对应的相对位移状态。比如，若设 $y_1 = 1$，对应于 p_1 的位移相对值 $y_2 = -1.313$，$y_3 = 0.724$；对应于 p_2 的位移相对值 $y_2 = 0.242$，$y_3 = -0.941$；对应于 p_3 的位移相对值 $y_2 = 1.570$，$y_3 = 1.467$。它们分别对应于图 2 中的 a、b 和 c 点，与之对应的总势能 $\Pi = 0$。图 2 中各斜线段表示当体系取不同的相对位移值 y_1：y_2：y_3 时纵向力 p 与能量 Π 的对应关系：

（1）若 $p < p_1$，则只要有位移，相应的能量处于区域 A，恒有 $\Pi > 0$，二次型 Π 是正定的，平衡是稳定的。

（2）若 $p = p_1$，则仅当相对位移 y_1：y_2：y_3 = 1：－1.313：0.724 时 $\Pi = 0$，表示体系处于临界状态，否则 $\Pi > 0$，表示处于稳定平衡状态，二次型 Π 是半正定的，由竖线 I 上的各点表示。

（3）若 $p_1 < p < p_3$，取任意相对位移时，Π 的值可以是正、负或零，称二次型是不定的，在理论上相应的平衡性质分别对应稳定状态、不稳定状态和临界状态，这由不包括竖线 I 和 II 之间的区域 B 表示。

（4）若 $p = p_3$，则仅当取相对位移 y_1：y_2：y_3 = 1：1.570：1.467 时 $\Pi = 0$，否则 $\Pi < 0$。二次型 Π 是半负定的，在理论上相应的平衡性质分别对应临界状态和不稳定

状态，由竖线 II 上的各点表示。

（5）若 $p>p_3$，则只要有位移，相应的能量处于区域 C，恒有 $\Pi<0$，二次型 Π 是负定的，平衡状态是不稳定的。

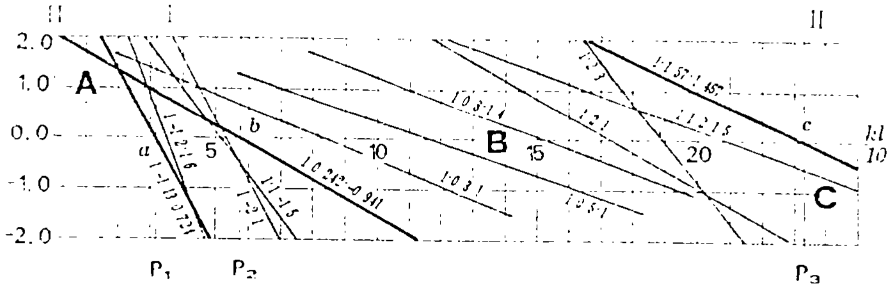

图 2

综上所述可见，图2能清晰地表示体系平衡状态的能量特征及数学特征：凡小于最小特征值时，体系的能量处于 A 区，即正定区，属稳定平衡；凡大于最大特征值时，体系的能量均处于 C 区，即负定区，属于不稳定平衡；竖线 I 和 II 是两条界线，处于此界线间的 B 区域在数学上表示二次型是不定的；在力学上表示在此区间的势能可为正、负或零，也可呈现出平衡状态，但实际上由于该区间的荷载值均已大于最小特征荷载值，故平衡状态亦属不稳定的。由此可以推论，不管体系的自由度是多少，都具有这种特征，除了 A 区外，其右均属能量的非正定区。

在图1的 B 区域中若取相对位移 y_1: y_2: y_3 = 1: 0.5: 1，当 $p>1.125kl$，时势能 Π 是负的，平衡是不稳定的，当 $p<1.125kl$ 时势能 Π 是正的，平衡是稳定的，但是这种所谓的稳定平衡只有在初始位移是 1: 0.5: 1 时才能实现，因此在力学上只有理论意义。

参　考　文　献

1 龙驭球.包世华.结构力学教程.北京.高等教育出版社.1988

2 上海交通大学数学教研室.线性代数.北京.人民教育出版社.1978

3 [美]A・查杰斯.结构稳定性理论原理.兰州.甘肃人民出版社.1982

Graphic Method of Energy and Maths Characteristic in Stable Equestion

Deng Xiutai

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: The numbers of characteristic loads equal the freedom degrees on theory when the steady question of branch point is discussed. The total potential energy Π of a system is sysmmetry real number quadratic type for displacement y. The relations between the energy characteristic and maths characteristic can be shown with graphic at different loading steps and the clear physical senses are bestowed on several definition fields of quadratic type.

Keywords: steady, characteristic valub, freedom degree, quadratic type