第16卷 第2期　　郑 州 工 学 院 学 报　　Vol.16 No.2
1995年 6 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Jun. 1995

最优一致逼近若干命题的证明与探讨*

赵玉莹

(郑州工学院数力系)

摘　要：本文用直接法证明了对普通多项式的切比雪夫交错定理，提出并证明了关于最优一致逼近的几个命题。

关键词：最优一致逼近，插值，一致收敛

中图分类号：O174

在求函数近似式的讨论中，最优一致逼近多项式是一种重要的近似工具，切比雪夫交错定理在讨论中起重要作用．本文用直接法证明了对普通多项式的交错定理，并从定理出发提出并证明了函数 f 的 Lagrange 插值多项式在[a,b]上一致收敛于 f 的几个关于最优一致逼近的命题。

1　概念与记号

首先给出有关概念，$f\in C[a,\ b]$，，使 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|=\|f-p\|$ 最小的 n 次多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 为 f 在 $[a,\ b]$ 上的 n 次最优一致逼近多项式。令 H_n 表示 n 次多项式的全体，$E_n(f)=\min\limits_{p\in H_n}\|f-p\|$。

下面证明对上述普通多项式的切比雪夫交错定理。

2　定理及证明

定理

n 次多项式 $p(x)$ 成为 $y=f(x)$ 在 $[a、b]$ 上最优一致逼近多项式的必要条件是误差函数 $r(x)=f(x)-p(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上以正负相间的符号依次取值为 $\|r\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|$ 的

* 收稿日期：1993-03-27

点的个数不少于 $n+2$ 个。

证明：充分性

假设存在交错点组 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}\leqslant b$，有 $|r(x_i)|=\|r\|$，$r(x_i)=-r(x_{i-1})$ 欲证 P 是 f 的最优逼近。反证之，若不然，存在 n 次多项式 p_0，使 $\|f-p_0\|<\|f-p\|=\|r\|$。

由 $p_0-p=(f-p)-(f-p_0)$，由条件可知，p_0-p 在 $\{x_i\}$ 交错变号和 $f-p$ 符号一致，则 p_0-p 有 $n+1$ 个零点，由此得出 $p_0=p$。

必要性

设 x_0 是 $[a,b]$ 上的第一点，在该点处 r 的值达到 $\pm\|r\|$，不防设 $r(x_0)=\|r\|$。设 x_1 是 $[x_0;b]$ 上的第一点，在该点处 $r(x_1)=-\|r\|$，照此进行下去，定义了各点 $x_0<x_1<\cdots<x_k$，使 $r(x_i)=(-1)^i\|r\|$ 如果 $k>n$ 则证毕。否则，定义 $y_i(i=1,\cdots,k)$ 是 r 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中的最大的根，令 $h(x)=\prod_{i=1}^{k}(y_i-x)$，下面证明对某个 $\lambda>0$，与 P 相比 $p-\lambda h$ 是对 f 的一个更好的逼近。

考虑区间 $[x_{i-1},x_i]$，把它分成两个子区间 $[x_{i-1},x_i]=[x_{i-1},y_i]\bigcup[y_i,x_1]$，其中 y_i 为 $r(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中最大的根。

当 $x\in[y_i,x_i]$ 时，由 $r(x_i)=(-1)^i\|r\|$，可得 $r(x)$ 在 $[y_i,x_i]$ 的符号为 $(-1)^i$，此时 $h(x)=\prod_{i=1}^{k}(y_i-x)$ 的符号也为 $(-1)^i$，所以对任何 $\lambda>0$，$\|r(x)-\lambda h(x)\|\leqslant\|r(x)\|$，对 $x\in[y_i,x_i]$。

当 $x\in[x_{i-1},y_i]$ 时，此时 $h(x)$ 的符号为 $(-1)^{i-1}$ 而 $(-1)^{i-1}\|r\|\leqslant r(x)\leqslant(-1)^i\|r\|$ （i为偶数），或 $(-1)^i\|r\|\leqslant r(x)\leqslant(-1)^{i-1}\|r\|$ （i为奇数），在i为偶数时，$-\|r\|\leqslant r(x)\leqslant\|r\|$，$h(x)$符号为负，适当选取充分小的$\lambda_i>0$，使一切

$$-h(x)\lambda_i<\frac{\|r\|-r(x)}{2},\quad \text{则有}$$

$$-\|r\|<-\|r(x)-\lambda_i h(x)\|\leqslant r(x)-\lambda_i h(x)\leqslant r(x)+\frac{\|r\|-r(x)}{2}\leqslant\|r\|$$

即 $\|r(x)-\lambda_i h(x)\|<\|r\|$

同理 i 为奇数时，也可得 $\||r(x)-\lambda_i h(x)\|<\|r\|$，总之，对区间 $[x_{i-1},x_i]$ 可以找到充分小的 λ_i，使得 $\|r(x)-\lambda_i h(x)\|\leqslant\|r\|$.

设 $\lambda=\min\limits_i\lambda_i$，其中 λ_i 对应于每个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 所选取的，那么可使 $\|r(x)-\lambda h(x)\|<\|r\|$，即 $\|p-\lambda h-f\|<\|p-f\|$，也即 $p-\lambda h$ 比 P 对 f 有更好的逼近。

3　五个命题

利用上述定理，我们给出关于普通多项式的最优一致逼近的五个命题.

命题 1

设$f\in C[a, b]$, $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}\leqslant b$, 如果$P$是$f$的插值多项式，$Q(x_i)=(-1)^i$，则$f$在$\{x_i\}$上的$n$次最优一致逼近多项式是$p-\lambda Q$，且偏差$=\|\lambda\|$。

证明　在$[a, b]$上作f的n次插值多项式$p(x)$,

使　　$p(x_i)=f(x_i)$　　$(i=0, 1, \cdots, n+1)$

取　　$Q(x_i)=(-1)^i$　　$(i=0, 1, \cdots n+1)$

选取适当$\lambda>0$，使$p(x)-\lambda Q(x)$是n次多项式，则由$r(x)=f(x)-(p(x)-\lambda Q(x))$

有　$r(x_i)=\lambda Q(x_i)=\lambda(-1)^i$　　$(i=0, 1, \cdots, n+1)$由切比雪夫定理，$p-\lambda Q$是f在$\{x_i\}$上最优一致逼近多项式，且偏差$=|\lambda|$。

特别，当我们取f的 *Lagrange* 插值多项式时有下面命题 2。

命题2

对每个$f\in C[a, b]$, 对应一组点$\{x_{ni}\}$，$n=0, 1, 2, \cdots\cdots$和$i=0, 1, 2, \cdots\cdots n$. 使得若$L_nf$是在节点$x_{n0}$，$x_{n1}$，$\cdots$，$x_{nn}$上对$f$的 *Lagrange* 插值多项式,

则　$L_nf\to f$一致地成立，$(n\to\infty)$.

证明: 对确定的$f\in C[a, b]$, 对任何n都存在一个最优一致逼近多项式$p_n(x)$, 使得

$$\|f-p_n\|=\min_{p\in H_n}\|p-f\|=E_n(f)$$

由切比雪夫定理，一定存在$n+2$个点y_{n0}，y_{n1}，$\cdots y_{nn+1}$，使得$r_n(x)=f(x)-p_n(x)$在这$n+2$个点上交错易号，由连续性$r_n(x)$在$[a, b]$上一定有$n+1$个根，即存在$x_{ni}\in(y_{ni}, y_{ni+1})$

使　　$r_n(x_{ni})=0$　　$(i=0, 1, 2, \cdots\cdots n)$

也即是　$f(x_{ni})=P_n(x_{ni})$　　$i=0, 1, 2, \cdots\cdots n$

因为P_n是n次多项式，且在$n+1$个点上与f值相等，故P_n是在这些点$\{x_{ni}\}$　$(i=0, 1, 2, \cdots\cdots n)$上对$f$的 *Lagrange* 插值多项式。即$P_n=L_nf$

由 *Weierstrass* 定理，存在多项式系列Q_1，Q_2，$\cdots$一致收敛于f，即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$\|Q_n-f\|<\varepsilon$。

又由$\|p_n-f\|=\min\limits_{p\in H_n}\|p-f\|\leqslant\|Q_n-f\|<\varepsilon$,

故，$\|L_nf-f\|\to 0$　　$(n\to\infty)$

注: 证明中用到最优一致逼近的存在性定理，见（2）。插值多项式的唯一性，

见（1）。

命题3

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 阶可导且在 $[a, b]$ 上 $f^{(n+1)}(x)$ 恒号，P 是 f 的 n 次最优一致逼近多项式，则 $f-p$ 的交错点是 $n+2$ 个。

证明：由命题 2 可知，P 是 f 以 $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，为节点的 *Lagrange* 插值多项式，由 $f(x)n+1$ 阶可导，则有 $(p-f)(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\zeta_i)}{(n+1)!}W(x)$ 其中，$W(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$。

由已知 $[a, b]$ 上 $f^{(n+1)}(x)$ 恒号，则 $(f-p)(x)$ 的交错点不多于 $n+2$ 个。而由切比雪夫定理可知 $(f-p)(x)$ 的交错点至少是 $n+2$ 个。所以 $(f-p)(x)$ 的交错点是 $n+2$ 个。

命题4

给定 $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leqslant b$，设 λ 和 P 由条件 $\lambda(-1)^i + p(x_i) = f(x_i)$ 确定，记 $\lambda = \lambda(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1})$ 则有 $E_n(f) = \min\limits_{p \in H_n} \|f-p\| = \max\limits_{x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}} |\lambda(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}|$

证明：设 p 是 f 的最优逼近，由切比雪夫定理，一定存在 $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$，使

$$\pm E_n(f)(-1)^i + p(x_i) = f(x_i)$$

显然，$E_n(f) \leqslant \max\limits_{x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}} |\lambda(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}|$

另一方面，对任意 n 次多项式 p 和 λ，如果满足 $\lambda(-1)^i + p(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, 1, \cdots, n+1$

即 $f(x_i) - p(x_i) = \lambda(-1)^i$

也就是 $f-p$ 在 x_i 处交错改变符号，利用 *Vallee-Poussin* 定理，有

$$E_n(f) \geqslant \min_i |f(x_i) - p(x_i)| = \lambda$$

由 $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$ 任意性，可得

$$E_n(f) \geqslant \max_{x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}} |\lambda(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}|$$

所以

$$E_n(f) = \max_{x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}} |\lambda(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}|$$

命题5

命题4中的 $\lambda = \lambda(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}) = \sum\limits_{i=0}^{n+1} \dfrac{\alpha_i}{\alpha} f(x_i)$

其中：$\alpha_i = \prod\limits_{i=0, j \neq i}^{n+1} (x_i - x_j)^{-1}$，　　$\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n+1} (-1)^i \alpha_i$.

证明：如果 $p(x)$ 是在 $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$ 对 f 的 *Lagrange* 插值多项式，由命题 2

也即是f的最优逼近，所以

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n+1}f(x_j)\prod_{i=0\ i\neq j}^{n+1}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

取

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^i\prod_{i=0\ i\neq j}^{n+1}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

则 $Q(x_i)=(-1)^i \quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n+1$

上述P，Q为$n+1$次多项式，且P的$n+1$次项的系数为

$$\sum_{j=1}^{n+1}f(x_j)\prod_{i=0\ i\neq j}^{n+1}(x_j-x_i)^{-1}=\sum_{j=0}^{n+1}f(x_j)\alpha_j$$

$Q(x)$ 的 $n+1$ 次项系数为$\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^i\alpha_j$，选取 λ，使

$$\lambda=\sum\frac{\sum_{j=0}^{n+1}f(x_j)\alpha_j}{\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^i\alpha_j}=\sum_{i=0}^{n+1}\frac{\alpha_i}{\alpha}f(x_i)$$

其中 $\alpha=\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^i\alpha_j$

$$\alpha_j=\prod_{i=0\ j\neq 1}^{n+1}(x_i-x_j)^{-1}$$

证毕。

参　考　文　献

1 邓建中等著.计算方法.西安交大出版社.1985

2 E.W.切尼著.逼近论导引.上海科学技术出版社.1981

3 Introduction to Numerical Analysis. 1974

The proof and exploration of several propositions about best approximations

Zhao Yuying

(ZhengzhouInstitute of Technology)

Abstract: This paper proves that Tchebycheff alternation therems. Several propositions about best approximetions are given and proven.

Keywords: best approximation; interpolation; uniform convergence