第16卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.16 No.2
1995年 6 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Jun. 1995

关于二次型最优极点配置的几个问题*

冯冬青 谢宋和

(郑州工学院) (郑州轻工业学院)

摘 要: 本文分析了闭环极点与二次型性能指标中的加权矩阵Q之间的关系，讨论了指定闭环极点选择问题，所得结论有助于进一步深入研究最优极点配置问题。

关键词: 最优控制、加权矩阵、极点配置，LQ 逆问题

中图分类号: TP271.61; TP273.1

众所周知，通过线性二次型最优设计方法（简称LQ设计方法）得到的闭环系统具有许多优良的内在鲁棒性[1]，因此，它在工程实际系统设计中得到了广泛的应用。但是，由于在使用该设计方法时，必须事先选择加权矩阵Q、R，然后求解对应的Riccati方程，从而得到一个最优控制规律。遗憾的是闭环系统的动态响应与加权矩阵Q、R之间存在着非常复杂的对应关系，这就给Q、R的选择带来了很多困难。目前，普遍采用的是仿真试凑方法，这无疑限制了LQ设计方法在工程上的推广应用。

最优极点配置问题就是从希望的系统动态响应出发，设置一组指定的闭环极点，然后确定满足极点配置要求的反馈阵K，且使之成为一个最优反馈（即存在$Q\geqslant 0$，$R>0$与K对应）。对于单变量系统而言，一旦指定了一组期望的闭环极点，那么与之对应的K便可唯一确定。因此，重要的问题是如何保证所选择的闭环极点恰好就是一组最优极点，即存在$Q\geqslant 0$，$R>0$与之对应。我们更关心的不是如何确定Q和R，即所谓的LQ逆问题的求解问题，而是$Q\geqslant 0$，$R>0$的存在性问题。对于多变量系统来说，由于满足极点配置要求的反馈增益是非唯一的，有一定的自由度可供利用。故最优极点配置的意义就在于充分利用极点配置所剩下的自由度，从满足极点配置要求的反馈增益集合中找出一个（或多个）最优解。求解的办法可以是先找到与指定极点相对应的加权矩阵Q和R，再把它们代入Riccati方程，求得P，从而可得到满意的最优反馈。

* 收稿日期: 1993-08-30

1 闭环系统与加权矩阵的关系

考虑一个线性定常可控系统

$$\dot{X}=AX+Bu \tag{1}$$

式中A、B分别是$n\times n$，$n\times 1$的常数矩阵，且

$$A=\begin{bmatrix} I_{n-1} & & & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0\\ \cdots \\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{2}$$

取性能指标为

$$J=\int_0^\infty (X^TQX+u^2)dt, \qquad Q\geqslant 0 \tag{3}$$

由最优控制理论可知，使（3）极小的最优控制规律为

$$u=-KX=-B^TPX \tag{4}$$

式中P满足矩阵代数$Riccati$方程

$$A^TP+PA-PBB^TP+Q=0 \tag{5}$$

由（1）式和（4）式可得最优闭环系统

$$\dot{X}=(A-BK)X\hat{=}A_cX \tag{6}$$

令
$$P_o(s)=det(SI-A)=\sum_{i=1}^{n}a_iS^i \tag{7}$$

$$P_c(s)=det(SI-A_c)=\prod_{i=1}^{n}(S-S_{ci})=\sum_{i=0}^{n}b_iS^i \tag{8}$$

式中$S_{ci}(i=1,2,\cdots,n)$为指定的闭环极点。

定理 1 使闭环系统（6）具有指定极点S_{ci}的加权矩阵Q由下式确定:

$$Q_{ij}=b_{i-1}b_{j-1}-a_{i-1}a_{j-1}-P_{i,j-1}-P_{j,i-1} \tag{9}$$

式中$Q_{i,j}$，和$P_{i,j}$分别表示矩阵Q、P的第i行第j列元素，且满足$P_{i,j}=P_{j,i}(i=1,2,\cdots,n)$；当$i$或$j\leqslant 0$时，$P_{i,j}=0$；当$i$和$j\leqslant n-1$时，$P_{i,j}$为自由参数；当$i$或$j=n$时，有

$$P_{i,n}=P_{n,i}=b_{i-1}-a_{i-1} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{10}$$

证明：由（5）式至（8）式可得

$$K=[b_0-a_0,\ b_1-a_1,\cdots,\ b_{n-1}-a_{n-1}] \tag{11}$$

根据（4）式可知，

$$K=B^TP=[0\cdots 01]P$$

即
$$P_{n,i}=P_{i,n}=K_i \tag{12}$$

把A、B、P代入（5）式，展开后可得

$$Q_{i,j}=b_{i-1}b_{j-1}-a_{i-1}a_{j-1}-P_{i,j-1}-P_{j,i-1} \tag{13}$$

显然，由（12）式可知，满足极点配置要求的 P 阵中有 $n(n-1)/2$ 个自由参数，因此，（13）式中的 Q 阵也包含有 $n(n-1)/2$ 自由参数，这就说明（9）式是 LQ 逆问题解的全体。当取不同的参数 $P_{i,j}(1\leqslant i,\ j\leqslant n-1)$ 时，将对应有不同的 Q 阵，但是，这些不同的 Q 阵将确定相同的状态反馈增益，从而保证了有相同的闭环极点。

2　闭环极点的指定问题

文[1]已经指出，并不是任何一个稳定的反馈增益 K 都可以构成最优闭环系统，同样，也可以说并不是任何一组稳定的闭环极点都能成为最优极点，它们必须满足一定的约束条件。

定理 2　假设 S_{oi}，$S_{ci}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 分别是系统（1）和（6）的开环极点和最优闭环极点，则有下述不等式成立：

$$\sum_{j=1}^{n}S_{ci}^{2}\geqslant\sum_{i=1}^{n}S_{oi}^{2},\quad\prod_{i=1}^{n}|S_{ci}|\geqslant\prod_{i=1}^{n}|S_{oi}| \tag{14}$$

证明：设$F(s)=I+K(SI-A)^{-1}B$是最优控制的回差矩阵，则有

$$F^{T}(-s)RF(s)=R+B^{T}(-SI-A^{T})^{-1}Q(SI-A)^{-1}B \tag{15}$$

$$det F(s)=P_{c}(s)/P_{o}(s) \tag{16}$$

并且因为[1]$|det F(s)|\geqslant 1,\quad s=j\omega,\ \forall\omega\in R$　　(17)

根据（15）式至（17）式可以推出

$$P_{c}(j\omega)P_{c}(-j\omega)-P_{o}(j\omega)P_{o}(-j\omega)\geqslant 0\quad\forall\omega\in R \tag{18}$$

又　$$P_{c}(j\omega)P_{c}(-j\omega)=\prod_{i=1}^{n}(\omega^{2}+S_{ci}^{2})$$

$$P_{c}(j\omega)P_{c}(-j\omega)=\prod_{i=1}^{n}(\omega^{2}+S_{oi}^{2})$$

因此　$$\Phi(\omega^{2})\hat{=}P_{c}(j\omega)P_{c}(-j\omega)-P_{o}(j\omega)P_{o}(-j\omega)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(S_{ci}^{2}-S_{oi}^{2})\omega^{2n-2}+\cdots+\left(\prod_{i=1}^{n}S_{ci}^{2}-\prod_{i=1}^{n}S_{oi}^{2}\right) \tag{19}$$

显然，上式是一个偶次多项式，要使 $\Phi(\omega^{2})\geqslant 0,\ \forall\omega\in R$，其必要条件是首项系数与常数项均非负，即有（14）式成立。

定理 2 已说明：只当预期闭环极点 S_{ci} 满足不等式（14）时，指定的极点 S_{ci} 才有可能成为一组最优极点，由其对应的状态反馈也才可能构成最优闭环系统，也就是说才有可能存在 $Q\geqslant 0$，$R>0$ 与之对应。这是我们选择或修正指定极点的前提条件。

定理 3　对于单变量系统而言，指定的闭环极点 S_{ci} $(i=1,2,\cdots,n)$是一组最优极点的

充分条件是如下几个不等式同时成立。

$$b_{i-1}^2 - a_{i-1}^2 + 2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m(b_{i-m-1}b_{i+m-1} - a_{i-m-1}a_{i+m-1}) \geqslant 0 \tag{20}$$

式中$i=1, 2, \cdots, n$，且当$j>n$时，$a_j=b_j=0$

证明：由文[1]有

$$P_c(s)P_c(-s)=P_o(s)P_o(-s)+[adj(-SI-A)B]^T Q[adj(SI-A)B] \tag{21}$$

$$adj(SI-A)B=[1 \quad S \cdots S^{n-1}]^T \tag{22}$$

$$adj(-SI-A)B=[1 - S\cdots(-S)^{n-1}]^T \tag{23}$$

令 $$Q=diag\{Q_{11}, Q_{22}, \cdots, Q_{nn}\} \tag{24}$$

式中$Q_{ii}=b_{i-1}^2 - a_{i-1}^2 + 2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m(b_{i-m-1}b_{i+m-1} - a_{i-m-1}a_{i+m-1})$

若把（22）式至（24）式代入（21）式右边，展开矩阵的乘积后不难发现：由（24）式确定的$P_c(s)$有一组期望的闭环极点$S_{ci}(i=1, 2, \cdots, n)$。这就说明，（24）式是一个与指定极点$S_{ci}$对应的加权矩阵。因此，若（20）式成立，则$Q>0$，即存在$Q<0$与$S_{ci}$对应，也就是说指定极点$S_{ci}$是一组最优极点。根据定理3的结论，若利用定理2选择的指定极点$S_{ci}(i=1, 2, \cdots, n)$满足不等式（20），则可断定$S_{ci}$是一组最优极点，与之对应的唯一反馈增益K一定是最优的。对于多变量系统来讲，类似的有关问题正在研究过程中。

3 LQ 逆问题的解的唯一性问题

实质上，我们在上文中讨论的是LQ逆问题的解的存在问题。根据（13）式可以看出，与指定极点对应的加权矩阵Q是很多的，但是，它们并不都是LQ逆问题的解。只有满足$Q>0$的部分才是逆问题的解。那么，我们是不是可以这么说：如果LQ逆问题的解存在，则其解是非唯一的？关于这个问题，我们可以做如下初步讨论：从广义上来讲，也就是不限制R为单位阵时，逆问题的解是非唯一的，即与指定极点对应的加权矩阵对（Q，R）是不唯一的。从狭义上来讲，则不一定成立。即可能在限制R为某一正定阵时，对应的$Q>0$只有一个。例如，作者本人在文[3]中给出的一个反例，就足以说明这个问题。因此，逆问题的解的唯一性问题的研究仍是一个有待进一步研究的课题。

4 最优反馈增益矩阵 K 的唯一性

前面已经谈到，对于单变量系统来讲，如果指定的极点是一组最优极点，那么与之对应的最优反馈是唯一的。可是对于多变量系统而言。满足最优极点配置的反馈增益矩阵是否唯一呢？这个问题相当复杂。这是因为满足极点配置的状态反馈阵K有无穷多个，而对于同一个K，却又有不同的矩阵对（Q，R）与之对应。一般而言，最优反馈增益矩阵K是非唯一的，但是否也有无穷多个呢？若答案是肯定的话，将还有一定的自由度可供

利用．这也是一个有待深入研究的问题．现举一例如下[4]：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ -2 & -2 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{25}$$

文[5]已经说明：存在G和T_1使

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -2\end{bmatrix} \tag{26}$$

$$T^{-1}BG=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{27}$$

若期望的闭环极点为 $-2\pm j2$ 和 -9，则可取 $Q=T_1^{-T}\hat{Q}T_1^{-1}$，$R=G^{-T}G^{-1}$，且

$$\hat{Q}=\begin{bmatrix}72 & 0 & 0\\ 0 & 39 & 22-P_{11}\\ 0 & 22-P_{11} & 6\end{bmatrix}(P_{11}\text{为自由参数}) \tag{28}$$

对应的$K=G\hat{K}T_1^{-1}$，且

$$\hat{K}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix} \tag{29}$$

根据文献 [6]，取不同的变换阵 G 时，有不同的 T_1，因此对应有不同的反馈增益矩阵 K，不难验证，只要 P_{11} 满足

$$-3\sqrt{26}+22\leqslant P_{11}\leqslant 3\sqrt{26}+22 \tag{30}$$

则对应的 $Q\geqslant 0$．因此，K 是最优的，且也有很多个．例如，若取

$$G=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{31}$$

则有[6]

$$T_1=\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ -1 & -2 & -2\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix} \tag{32}$$

$$Q=\frac{1}{64}\begin{bmatrix}1241-2P_{11} & 112-4P_{11} & 1175-2P_{11}\\ 112-4P_{11} & 96 & 4P_{11}-16\\ 1175-2P_{11} & 4P_{11}-16 & 6P_{11}+1113\end{bmatrix} \tag{33}$$

$$K=\begin{bmatrix}5/8 & 1 & 3/8\\ 19/8 & -1 & 21/8\end{bmatrix} \tag{34}$$

5 文[2]的局限性

文[2]假定 Q 为对角阵，因此，得到

$$Q_{ii}=2a_{i-1}P_{in}+P_{in}^2-2P_{(i-1),i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{35}$$

式中 $P_{in}=b_{i-1}-a_{i-1}$，$P_{(i-1),i}$ 由 $f(a_i,\ b_i)$ 唯一确定。由于这种不合理的假设，则可能会出现如下现象：实质上指定的闭环极点是一组最优极点，但从（35）式求得的 Q 阵负定（或不定），从而得出错误的结论：给定的极点不是最优的。

例如，已知某三阶系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -9 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{36}$$

若期望的闭环指定极点分别为 $-2\pm j$ 和 -3，则 $b_0=15$，$b_1=17$，$b_2=7$。根据文[2]有

$$Q=\begin{bmatrix}225 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 24\end{bmatrix} \tag{37}$$

显然，（37）式中的 Q 不定，因此会错误地认为给定的极点不是最优的，或者不能判定给定的极点是否是一组最优极点。

利用本文的定理1可得

$$Q=\begin{bmatrix}225 & 225-P_{11} & 105-P_{12}\\ 225-P_{11} & 208-2P_{12} & 77-P_{22}\\ 105-P_{12} & 77-P_{22} & 24\end{bmatrix} \tag{38}$$

因此，只要能找到一组参数$(P_{11},\ P_{12},\ P_{22})$使 $Q\geqslant 0$，即可断定所选择的闭环极点是一组最优极点。在本例中，若取 $P_{11}=225$，$P_{12}=100$，$P_{22}=77$，则

$$Q=\begin{bmatrix}225 & 0 & 5\\ 0 & 8 & 0\\ 5 & 0 & 24\end{bmatrix}>0 \tag{39}$$

因此，正确的结论应是：$-2\pm j$ 和-3 是一组最优极点，与之对应的 $K=[15 \quad 8 \quad 4]$是最

优的。

参　考　文　献

1 Anderson, B.D.Oand Moore, J B. Linear Optimal Control, Prentice-Hall, 1971

2 孙光伟，王成福.由闭环极点配置确定误差加权阵Q的一种方法.哈尔滨建筑工程学院学报.1992，2 (24)：98-104

3 谢宋和.有关《指定闭环特征值的最优控制系统参数化设计》文中定理2的一个反例.控制与决策，1991，6 (6)：480-481

4 Amin, M. H. Optimal Pole Shifting for Continuous Multivariable Linear Systems. Int. J. Control, 1985, 3(41): 701--707

5 谢宋和.连续系统LQ逆问题研究及应用.1992年中国控制与决策学术年会论文集.沈阳：东北工学院出版社，1992

6 须田信英等著.曹长修译.自动控制中的矩阵理论.北京：科学出版社.1979

Some Problems about the Quadratic Optimal Poles Assignment

Feng Dongqing　　Xie Songhe

(Zhengzhou Institute of Technology)　(Zhengzhou Institute of Light Industry)

Abstract: The relations between the closed-loop and the weighting matrix Q in the quadratic performance index are analysed in this paper. The choice of prescribed closed-loop poles is studied. The gained results are useful for further research of the optimal poles assignment problems.

Keywords: optimal control, weighting matrix, pole assignment, LQ inverse problem

---

(上接 56 页)

Analysis for the speed control units of FANUC-11 series AC servo system

Shi Li　　Wu Tianfu

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: The AC servo system of FANUC-11 series is a AC-DC-AC conversion frequency speed—adjusting system, which use PWM as the speed—adjusting control method. In this paper, the speed control units was analyzed, and it is important to improve the CNC machines of our country.

Keywords: AC—DC—AC conversion; frequency; speed-adjusting system; PWM, speed control units