

计算飞轮转动惯量的几种方法*

熊滨生 崔光彩 张成群

(郑州工学院)

摘 要: 本文根据飞轮转动惯量的基本方程给出三种计算方法, 且根据其中一种编出计算程序, 并给出流程图及上机运算结果。

关键词: 飞轮, 转动惯量, 飞轮动能

中图分类号: TH113

在机器动力学研究中, 当力为机构位置函数时, 求解飞轮的转动惯量是很重要的一部分内容, 并在实际设计工作中也有着重要意义。由[2]知, 机器稳定运转时期, 其总动能为

$$E(\varphi) = E_F(\varphi) + E_R(\varphi) \quad (1)$$

式中 $E(\varphi)$ 机器的总动能

$E_F(\varphi)$ 飞轮的动能

$E_R(\varphi)$ 除飞轮外机器所有其他运动构件的动能

由(1)式可得确定飞轮转动惯量的基本方程式

$$E_F(\varphi) = \frac{1}{2} J_F \omega^2(\varphi) = E_b + \Delta E(\varphi) - \frac{1}{2} J_R(\varphi) \omega^2(\varphi) \quad (2)$$

式中: E_b 机器稳定运转时期开始时机器的动能

$\Delta E(\varphi)$ 稳定运转时期一个循环开始至其中任一位置时的机器动能增量

J_F 飞轮转动惯量

$J_R(\varphi)$ 除飞轮外, 其他所有构件的等效转动惯量

且 $J_R(\varphi) = J_{R1} + J_{R2}(\varphi)$

式中 J_{R1} : $J_{R2}(\varphi)$ 中的常量部分

$J_{R2}(\varphi)$: $J_R(\varphi)$ 中的变量部分

* 收稿日期: 1993-11-23

1 J_F 的近似求法

为简化问题起见, 假设其他构件一项中 $\omega = \omega_m$, 由 (2) 式得

$$E_F(\varphi) = \frac{1}{2} J_F \omega^2(\varphi) = E_h + \Delta E(\varphi) - \frac{1}{2} J_R(\varphi) \omega_m^2 = E(\varphi) - E_R(\varphi) \quad (3)$$

式中 ω_m 机器主轴 (等效构件) 实际平均角速度

(3) 式中 $\Delta E(\varphi)$ 、 $J_R(\varphi)$ 可用文献 [2] 中方法求出, 而 E_h 的值实际上对 J_F 计算无影响。可暂设 E_h 为已知, 由 (3) 式可得飞轮动能曲线 $E_F(\varphi)$; 且当

$$\omega = \omega_{max} \text{ 时, } E_{Fmax} = \frac{1}{2} J_F \omega_{max}^2 \text{ 为飞轮动能最大值}$$

$$\omega = \omega_{min} \text{ 时, } E_{Fmin} = \frac{1}{2} J_F \omega_{min}^2 \text{ 为飞轮动能最小值}$$

$$\text{由 (3) 式右边 } E_h + \Delta E(\varphi) - \frac{1}{2} J_R(\varphi) \omega_m^2 \text{ 可找出 } E_{Fmax}、E_{Fmin}$$

$$\text{而 } E_{Fmax} - E_{Fmin} = \frac{1}{2} J_F (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) = J_F \delta \omega_m^2$$

$$\text{可写成 } J_F = \frac{E_{Fmax} - E_{Fmin}}{\delta \omega_m^2} \quad (4)$$

式中 δ 机器运转不均匀系数

由于其他构件动能项中设定 $\omega = \omega_m$, 所以本方法存在理论误差。其改进方法为将 $J_R(\varphi)$ 中的常量部分 J_{R1} 一并算入飞轮转动惯量, 则可减小理论误差。见 [2] 此处不再赘述。

2 J_F 的精确求法

由 (2) 式知, 当 $\omega = \omega_{max}$ 时, $E_F(\varphi)$ 为最大值, 但此时 $\Delta E(\varphi)$ 不一定最大 (设计飞轮时等效构件角速度 $\omega(\varphi)$ 变化规律未知), 则 $E_F(\varphi)$ 中关系不能确定。为解决这一问题, 可仿照基本方程式 (2) 造一函数

$$E_1(\varphi) = E_h + \Delta E(\varphi) - \frac{1}{2} J_R(\varphi) \omega_{max}^2 \quad (6)$$

比较 (2)、(6) 式可知, 仅当 $\omega = \omega_{max}$ 时, $E_1(\varphi) = E_F(\varphi)$; 而在其余任何位置, 由于 $\omega < \omega_{max}$, 所以 $E_1(\varphi) < E_F(\varphi)$

$$\text{可得 } E_1(\varphi)_{max} = E_F(\varphi)_{max} = \frac{1}{2} J_F \omega_{max}^2 \quad (7)$$

同理, 造一函数

$$E_2(\varphi) = E_h + \Delta E(\varphi) - \frac{1}{2} J_R(\varphi) \omega_{min}^2 \quad (8)$$

仅当 $\omega = \omega_{min}$ 时, $E_2(\varphi) = E_F(\varphi)$; 而在其余任何位置, 由于 $\omega > \omega_{min}$, 有 $E_2(\varphi) > E_F(\varphi)$

$$\text{可得 } E_2(\varphi)_{min} = E_F(\varphi)_{min} = \frac{1}{2} J_F \omega_{min}^2 \quad (9)$$

由上述可得

$$\frac{1}{2} J_F (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) = E_1(\varphi)_{max} - E_2(\varphi)_{min} = J_F \delta \omega_m^2 \quad (10)$$

$$\text{可写成 } J_F = \frac{E_1(\varphi)_{max} - E_2(\varphi)_{min}}{\delta \omega_m^2} \quad (11)$$

3 J_F 的极值求法

为简化起见 (不妨碍一般性), 将 (3) 式对 φ 求导。由高等数学知识知道 $\frac{dE_F(\varphi)}{d\varphi} = 0$ 处, $E_F(\varphi)$ 有极大值或极小值。令

$$dE_F(\varphi)/d\varphi = \frac{1}{2} J_F \frac{d(\omega^2(\varphi))}{d\varphi} = \frac{dE_h}{d\varphi} + \frac{d\Delta E(\varphi)}{d\varphi} - \frac{1}{2} \omega_m^2 \frac{dJ_R(\varphi)}{d\varphi} = 0 \quad (12)$$

因为 $E_h = \text{const}$, 所以 $\frac{dE_h}{d\varphi} = 0$

$$\text{又 } \frac{d\Delta E(\varphi)}{d\varphi} = \frac{d(\int_0^\varphi Me(\varphi)d\varphi)}{d\varphi} = Me(\varphi) \quad (13)$$

式中 $Me(\varphi) = Md(\varphi) - Mr(\varphi)$ 等效力矩

$$\text{且 } \frac{1}{2} \omega_m^2 \frac{dJ_R(\varphi)}{d\varphi} = M^*(\varphi) \quad (14)$$

$$\text{故由 (12) 式得 } Me(\varphi) = M^*(\varphi) \quad (15)$$

上述说明, 等效力矩 $Me(\varphi)$ 函数与 $M^*(\varphi)$ 函数曲线相交处正是飞轮动能 $E_F(\varphi)$ 有极值的机构位置, $Me(\varphi)$ 与 $M^*(\varphi)$ 可能交于多处, E_h 为常数, 对求解 J_F 无影响, 故

只考虑 (3) 式等号右边后两项, $\frac{dE_F(\varphi)}{d\varphi} = 0$ 时机构对应位置处 $\Delta E(\varphi) - \frac{1}{2} J_R(\varphi) \omega_m^2$

的极值中, 总能找到最大值与最小值, 而 E_{Fmax} 与最大值 $\Delta E(\varphi_1) - \frac{1}{2} J_R(\varphi_1) \omega_m^2$ 相对

应; E_{Fmin} 与最小值 $\Delta E(\varphi_2) - \frac{1}{2} J_R(\varphi_2) \omega_m^2$ 相对应。由飞轮转动惯量的基本方程式 (2)

可得

$$\frac{1}{2}(J_F + J_R(\varphi_1))\omega_{max}^2 - \frac{1}{2}(J_F + J_R(\varphi_2))\omega_{min}^2 = E_h + \Delta E(\varphi_1) - (E_h + \Delta E(\varphi_2)) = \Delta E(\varphi_1) - \Delta E(\varphi_2)$$

(16)

又有
$$\begin{cases} \omega_{max}^2 = \omega_m^2(1 - \frac{\delta}{2})^2 \approx \omega_m^2(1 + \delta) \\ \omega_{min}^2 = \omega_m^2(1 - \frac{\delta}{2})^2 \approx \omega_m^2(1 - \delta) \end{cases}$$

(17)

可得
$$J_F = (\Delta E(\varphi_1) - \Delta E(\varphi_2)) / \delta \omega_m^2 + \frac{J_R(\varphi_2)(1 - \delta) - J_R(\varphi_1)(1 + \delta)}{2\delta}$$

(18)

4 实例

以第二方法为例计算牛头刨床飞轮转动惯量 J_F 。机构运动简图如图 1，已知条件见表 1，等效驱动力矩 M_d （常数）、等效阻力矩、 $M_r(\varphi)$ 计算中所需数据见[3]，电动机转速 $n'_0 = 1440 \text{r/min}$

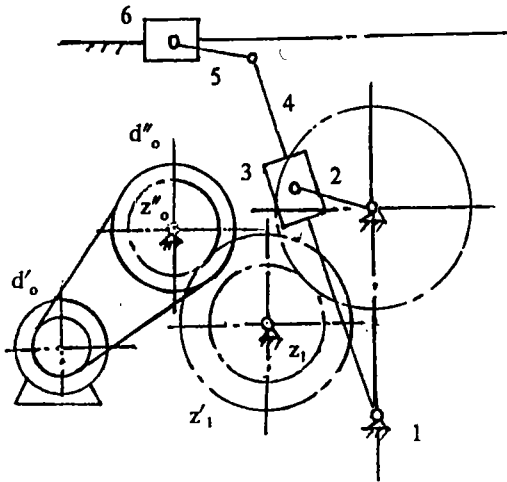
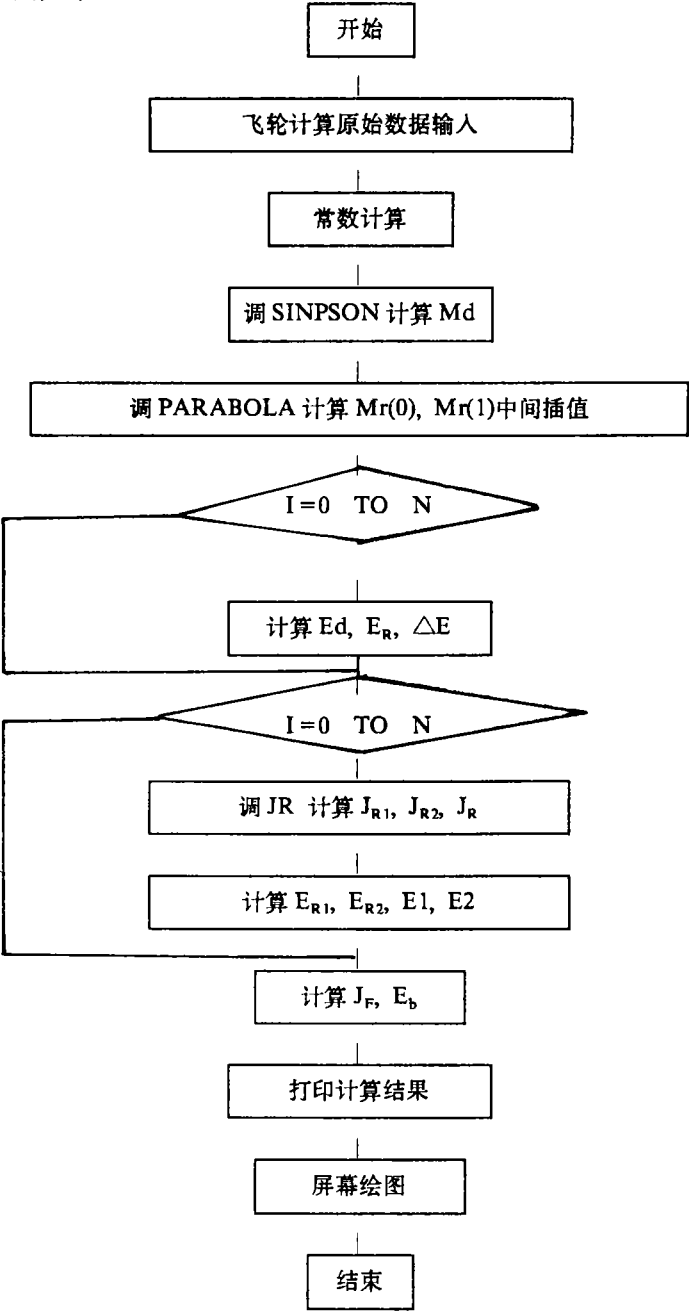


图 1

表 1

| N2 (r/min) | Lo2o4 (mm) | Lo2a (mm) | Lo4b (mm) | D | Zl | Zoii | Zli | Jo2 (kgm 2) | Jo1 (kgm 2) | JOii (kgm 2) | JOi (kgm 2) |
|---------------|---------------|--------------|--------------|------|----|------|-----|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| 60 | 380 | 110 | 540 | 0.15 | 10 | 20 | 40 | 0.5 | 0.3 | 0.2 | 0.2 |

主程序流程图如下:



E_b , $\Delta E(\varphi)$, $E_1(\varphi)$, $E_2(\varphi)$, 变化曲线见图 2, E_{R1} , E_{R2} 变化曲线见图 3。

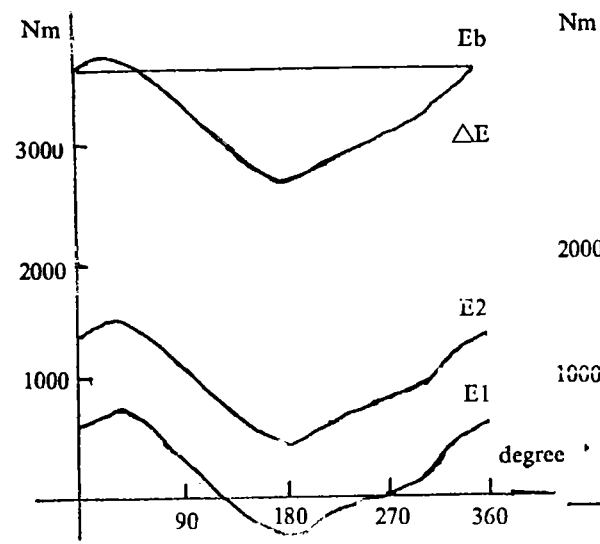


图 2

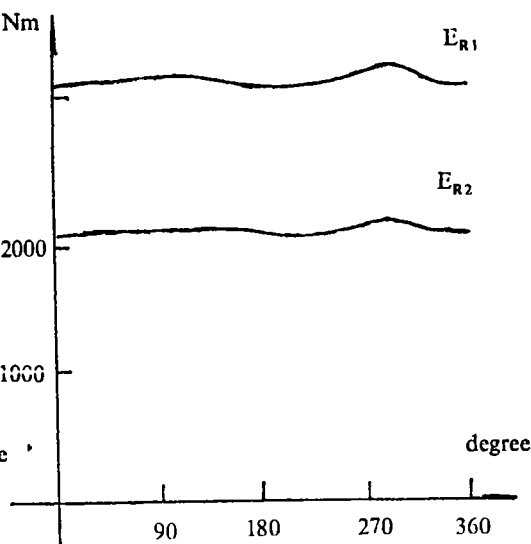


图 3

计算结果见表 2

表 2

| F(2) | Mr(nm) | E1(nm) | E2(nm) | dE(nm) | JR2 (kgm△2) | JR (kgm△2) | ER 1 (nm) | ER2 (nm) |
|--------|--------|---------|---------|---------|----------------|---------------|--------------|-------------|
| .00 | .00 | 629.13 | 1418.50 | .00 | .00 | 133.30 | 3040.72 | 2251.35 |
| 30.00 | 465.41 | 753.79 | 1545.10 | 132.12 | .33 | 133.63 | 3048.18 | 2256.87 |
| 60.00 | 730.66 | 564.20 | 1358.50 | -45.95 | .83 | 134.13 | 3059.70 | 2265.40 |
| 90.00 | 841.93 | 326.81 | 1122.94 | -276.18 | 1.14 | 134.44 | 3066.76 | 2270.63 |
| 120.00 | 282.13 | 27.20 | 823.32 | -575.91 | 1.14 | 134.44 | 3066.75 | 5570.62 |
| 150.00 | 710.26 | -186.32 | 60.319 | -795.65 | .87 | 134.17 | 3060.51 | 2266.00 |
| 180.00 | 474.32 | -349.55 | 442.21 | -969.48 | .40 | 133.70 | 3.49.93 | 2258.17 |
| 210.00 | -5.07 | -199.24 | 590.18 | -828.19 | .01 | 133.31 | 3040.90 | 2251.48 |
| 240.00 | 62.58 | -57.65 | 735.40 | -672.60 | .62 | 133.92 | 3054.90 | 2261.85 |
| 270.00 | 97.16 | -.41 | 806.97 | -560.17 | 3.04 | 136.34 | 3110.10 | 2302.72 |
| 300.00 | 83.42 | 152.16 | 961.70 | -399.29 | 3.41 | 136.71 | 3118.40 | 2308.87 |
| 330.00 | 74.22 | 425.84 | 1219.99 | -184.87 | .81 | 134.11 | 3059.15 | 2265.00 |
| 360.00 | .00 | 629.13 | 1418.50 | -.00 | .00 | 133.30 | 3040.72 | 2251.35 |

| Eb (nm) | Elmax (nm) | E2min (nm) | Md (nm) | JR1 (kgm 2) | Jf (kgm 2) | MD 2 (kgm 2) | Z2 |
|------------|---------------|---------------|------------|----------------|---------------|-----------------|-------|
| 3669.85 | 753.79 | 442.21 | 315.13 | 133.30 | 52.62 | 210.47 | 40.00 |

5 结 论

本文给出的三种飞轮转动惯量求法, 均可用于实际设计工作中。本文中根据第二种方法编写的飞轮设计程序, 可准确算出在机构不同位置时各变量的值, 并可在屏幕上绘出变化曲线, 供有关设计人员参考。飞轮实际动能 $E_F(\varphi)$ 的变化 (尽管飞轮运动规律 $\omega = \omega(\varphi)$ 并未求出), 必在 $E_1(\varphi)$ 与 $E_2(\varphi)$ 曲线之间一矩形区域内 (此矩形上边过 $E_1(\varphi)_{\max}$, 下边过 $E_2(\varphi)_{\min}$), 且 $E_F(\varphi)$ 上的 $E_{F\max}$ 与 $E_{F\min}$ 两点分别为 $E_F(\varphi)$ 与 $E_1(\varphi)$ 、 $E_2(\varphi)$ 的切点。

若与 J_{R2} 有关的构件在机器的低速部分, 实际上 J_{R2} 对 J_R 影响不大, 若用改进后的近似方法计算, 仍能获得较精确结果。

$\Delta E(\varphi)$ 曲线中, $\Delta E_{\max} - \Delta E_{\min}$ 即现有教科书中介绍的飞轮简易设计中的最大盈亏功 ΔW_{\max} 。本例中 $\Delta W_{\max} = 132.12 - (-969.48) = 1101.60(\text{NM})$ 。计算结果中 MD^2 为飞轮矩, Z_2 为本例中待求的 2 齿轮齿数。

参 考 文 献

- 1 周明溥, 曹志, 金孟浩编. 机械原理课程设计. 上海科学技术文献出版社. 1987 年第一版
- 2 黄锡恺, 郑文纬主编. 机械原理. 高等教育出版社. 1981 年修订版
- 3 熊滨生. 平面连杆机构的动态静力分析. 郑州工学院. 1994 年第 1 期
- 4 H.H.Mabie, F.W.Ocvirk: Mechanisms and Dynamics of machinery, Blackburg, Virginia, 1978
- 5 C.H. Suh, C.W.Redcliffe: Kinematics and mechanisms design, J.Wiley and Sons, 1978

Several Methods of caculating the intating Inertia of the flywheel

Xong Binsheng Chui Guangcai Zhang Chengqun
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: According to the basic equation of caculating the rotational inertia of the flywheel, three caculating methods are obtained and on the basis of one of the methods, the program has been written. The flow diagram is given and the caculation is finished with the computer.

Keywords: flywheel, rotating inertia, kinetic energy of the flywheel