第16卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.16 No.1
1995年 3月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Mar. 1995

误差及不确定度*

袁升兴

(郑州工学院数力系)

摘　要: 本文简要地阐述了使用不确定度替代误差来表征测量质量的合理性并较详细地讨论了不确定度的概念、估算和传播.

关键词: 误差，不确定度，标准差，概率

中图分类号: O241.1

1　误差的缺陷及不确定度的合理性

1.1　误差是指测量值与被测量的真实值（简称真值）之差，该定义虽然严格准确，但是在实际中却难以实现，其原因主要是被测量的真值一般无法知道，因此，误差也就难准确求出．而通常所说的误差实际上指的是残差（也称偏差）即待测量与其多次等精度测量的平均值之差。

1.2　误差按其产生的原因主要可分为偶然误差与系统误差两大类．偶然误差服从统计规律，其值可用正态分布来估算，并用方和根原理合成，具有概率意义．如果没有系统误差，用标准差表示测量精度就已完美无缺，然而实际上这是不可能的．系统误差却又比较复杂，一般分为可定系统误差和不可定系统误差两种．可定系统误差可以根据其产生原因，在测量前加以消除、修正或减小到可以忽略的程度，而不可定系统误差由于其服从分布规律不同（即正态分布或其它形态的分布），有的具有概率意义，有的却不具有概率意义，因此，如果只用统计方法计算的标准差来表示的话，就会使测量结果具有不包含被测量的真值的可能性，从而失去误差估算的意义．

1.3　测量值和真值从宏观（指测量方法、仪器、条件等因素）限制和微观（指量子效应的测不准关系）结果两个方面来说，都存在不确定问题，因此，用不确定度更能表达测量结果的特征和性质；而误差（error）一词的英文含义是错误、差别、罪过等，显然用它来表示测量结果的特征和性质是不确切的．

1.4　误差按其性质可视为由常差（可定系统误差）与不可定误差（偶然误差、不可定系统误差）两部分组成。对已知的常差，在实验或测量前应找出其产生原因，并加以修正。

* 收稿日期: 1994—04—01

在修正公式和修正量中也带有不确定的成份，应当用不确定度表示出来；对于不可定误差的大小，更应用不确定度来反映。

鉴于以上事实，国际计量局于 1980 年作出了实验不确定度规定建议书 INC[1] 并于次年被国际计量委员会所采纳。中国计量科学院也于 1986 年发出通知，规定在基准标准研究中，在测量和检定工作中，采用不确定度作为误差数字指标的名称，由国家技术监督局委托北京市标准计量局组织起草的《测量误差及数据处理技术规范》(报审稿)，也于 1990 年 5 月经审查通过，并将作为国家标准公布施行。在这个标准中，也明确规定测量结果误差评定用不确定度。

2　不确定度的概念与估算

2.1　不确定度的含义及分类[2] 不确定度是表征被测量真值的误差在某个范围的测度，也就是说由于误差的存在，使被测量的真值不能确定的程度。通常带有给定的可能性，可用合成不确定度的 1—3 倍表示其总不确定度的范围。

测量不确定度是一个描述尚未确定的误差的特征的量，其分类与以往误差分为偶然误差与系统误差不同，它是在可定系统误差修正之后，将其余的误差分为两大类；一类是可以用统计方法估算的误差，称为不确定度的 A 类分量，用估算方差 S_i^2 或估算标准差 S_i 来表征；另一类是不能用统计方法估算的其它误差称为不确定度的 B 类分量，用符号 U_j^2 表征，并认为它们也存在有相应的方差或能换算成方差，因而就可象方差那样去处理 U_j^2 或象标准差那样去处理 U_j，若以上分量彼此独立，可用方差合成法则给出合成不确定度 σ 值。

2.2　用统计方法估算不确定度—A 类分量

由于这类分量服从统计规律，故其最基本的估算方法仍然是单次测量标准差的具塞尔 (Bessel) 法。如 x_1，$x_2 \cdots x_n$ 为等精度多次测量值，其单次测量的标准差为 $S=\sqrt{\dfrac{\sum V_i^2}{n-1}}$，式中 $V_i = x-\bar{x}$ 为残差。其算术平均值的标准差为 $S_{\bar{x}}=\dfrac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\dfrac{\sum V_i^2}{n(n-1)}}$。

除此之外还有彼得 (Пemep) 法，最大残差法、最大误差法、分组极差法等估算方法，可使计算简化，而且与贝塞尔法估算值近似。彼得法的估算公式为 $S_{\bar{x}}=1.253\eta$。式中 η 为算术平均差，其计算公式为 $\eta=\dfrac{\sum|V_i|}{\sqrt{n(n-1)}}$。例如在电子束磁聚焦测定电子荷质比的实验中，求得一组荷质比 $K_i=(\dfrac{e}{m})_i$ 值如下:

次　数	1	2	3	4	5	6	平均
$K_i \times 10^{11}$(c／kg)	1.80	1.76	1.72	1.69	1.78	1.76	1.752
$\triangle K_i \times 10^{11}$(c／kg)	0.048	0.005	0.032	0.062	0.028	0.008	0.034

由贝塞尔法可得: $S_B=\sqrt{\frac{\sum\triangle K_i^2}{n-1}}=0.040\times 10^{11}\ (c/kg)$

由彼得法可得: $S_\pi=1.253\times 0.034=0.042\times 10^{11}\ (c/kg)$

其它误差的估算，则由以上各差值乘以该差值的系数即可．该系数的大小与测量次数有关，一般可从各自的系数数值表中查出．例如最大残差法的系数数值表如下:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
Cn	1.77	1.02	0.83	0.74	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.51	0.48

其中n为测量次数，Cn为该误差的系数值．

若$V_i=x_i-\bar{x}$，则 $S_i=Cn|V_i|_{max}$．

例如在上题中，最大残差 $\triangle K_{max}=0.062\times 10^{11}\ (c/kg)$，测量次数 $n=6$，从系数表中查得 $C_6=0.68$ 则

$$S_i=0.68\times 0.062\times 10^{11}=0.042\times 10^{11}\ (c/kg)$$

2.3 不能用统计方法估算的不确定度—B 分量[3]

由于这类分量不满足统计规律，故不能用统计方法来估算，其它估算方法一般有估计误差法、极限误差法、近似误差法等，下面分别予以介绍

2.3.1 估计误差的不确定度

若误差来源的不确定度 σ_t 对测量结果 ρ 的传播系数为 K，则该误差来源对测量结果 ρ 造成的不确定度为 $u=K\sigma_t$。

例如在绝对测量电阻率时，设温度不确定度为 $\sigma_t=0.50℃$，被测电阻率为 ρ，电阻率的温度系数为 α，即不确定度传播系数 $K=\rho\alpha=\rho\times 42\times 10^{-4}$（铝），因此，温度对电阻率造成的不确定度分量为

$$u_j=K\sigma_t=2.1\rho\times 10^{-3}\quad（微欧．米）$$

2.3.2 已知误差限± a 及其分布的不确定度这类误差可按下式估算出它的近似标准差:

$$u_j=a/c$$

式中 c 为相应该分布曲线的置信系数。

① 若测量误差服从正态分布，则若已知有 70%、50%、95% 或 99.7% 的误差落人 $\pm a$ 的误差限内，则与其相对应的不确定度分量 u_j 分别为近似标准差值的 a、$1\frac{1}{2}a$、$a/2$、或 $a/3$。

② 若测量误差为非正态分布，可按其具体分布估算近似标准差值．例如若已知其分布类型为两点分布、反正弦分布、均匀分布或三角分布等，则与其相对应的不确定度（即近似标准差）分量值分别为 a、$a/\sqrt{2}$、$a/\sqrt{3}$、或 $a/2.4$、等。

③仅知误差限$\pm a$，却不知其分布的不确定度。

在实际中处理这类问题，对误差限 $\pm a$ 的分布多给出经验假设，然后通过此分布假

设来估算近似标准差，从而得出不确定度分量。

分布假设是对实际分布的一种估算，可选上面谈到的正态分布、均匀分布、反正弦分布、三角分布、两点分布等类型，与其相对应的置信系数 c 分别为 3、$\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$、2.4 和 1 等值，分布假设应以经验资料为依据，不可主观任意假设。最后可由已知误差限 $\pm a$ 及其分布假设置信系数 c 按式 $u_j = a/c$ 求出不确定度分量。

3　不确定度传播

上面讨论了直接测量值的不确定度的估算，由于间接测量值是通过直接测量值和一定的函数关系计算出来的物理量，因此，直接测量值的不确定度就对间接测量值有影响，称为不确定度的传播，通常可采用高斯误差传播定律的广义形式"协方差传播律"来解决不确定度的传播问题。例如待测量

$$Y = f(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)$$

若其中 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 为相互独立的直接测量值，则不确定度的传播公式为：

$$S_y = \sqrt{\sum\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 S_i^2}$$

若其中 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 为相关的直接测量值，则不确定度的传播公式为：

$$S_y = \sqrt{\sum\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 S_{x_i}^2 + 2\sum_{j\neq j}\rho_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)S_{x_i}S_{x_j}}$$

式中 ρ_{ij} 为任意两测量值之间的相关系数。在实际应用中该式很繁杂，应尽量避免，可采用直接测量值为相互独立的高斯公式来处理实验不确定度的传播问题。

4　不确定度的综合

4.1　不确定度的合成。

若测量结果包含统计不确定度分量（A 类分量）和非统计不确定度分量（B 类分量），其表征为

A 类：S_1、S_2、$\cdots S_i$；　自由度 v_1、v_2、$\cdots v_i$

B 类：u_1、u_2、$\cdots u_j$；　自由度均为 1。

则合成不确定度及其自由度的表征值为：

$$\sigma = \sqrt{\sum S_i^2 + \sum u_j^2 + 2\sum_{k<l}\rho_{k,l}\sigma_k\sigma_l}$$

$$v = \frac{\sigma^4}{\sum\frac{S_i^4}{v_i} + \sum u_j^4}$$

式中σ_k，σ_l为S_i或u_j的任一协方差根，$\rho_{k,l}$，为k，l两分量的相关系数，其值在$|\rho_{k,l}|<1$之间，由同一来源所产生的误差为正相关，其相关系 $\rho_{kl}=1$；由不同来源产生的误差为不相关，其相关系数$\rho_{k,l}=0$。对于以上两种特殊情况来说，上式可简化为：

当分量$\rho_{k,l}=1$时，$\sigma=\sum S_i+\sum u_j$（线性和）

$\rho_{k,l}=0$时，$\sigma=\sqrt{\sum S_i^2+\sum u_j^2}$（方和根）

由于相关系数的计算非常麻烦，在不确定度合成时应当尽量避开。其方法一是将各相关量事先合成一个量；二是尽可能选取无关的误差来源，从而可使处理方法简化。

4.2　总不确定度

对合成不确定度乘一个因子c即得总不确定度，即

$$u=c\sigma$$

式中若c＝2时，其正态置信概率P＝0.9545

c＝3时，其正态置信概率P＝0.9973

或$c=t_p(\nu)$即由t分布计算，当合成不确定度的自由度ν求出后，其置信概率为P的t分布的临界值$t_p(\nu)$可由t分布数值表中查出，置信概率通常取P＝0.95，故其总不确定度为，

$$u=t_{0.95}(\nu)\sigma$$

最后测量结果表示为：

$L=L\pm u$　（应注明几倍标准差）

5　实例分析：称量不确定度[4]

用TC328B型天平，配三等砝码称一不锈钢球质量，得值14.0004g，今分析其不确定度。

①砝码引起的不确定度

所用砝码为两种三个，10g一个，2g二个，它们的极限误差1.2mg及0.6mg，它们对应于3倍标准差，故两种砝码的标准差

$$u_{11}=1.2/3=0.4\text{mg}$$

$$u_{12}=0.6/3=0.2\text{mg}$$

三个砝码组合质量M＝10+2×2＝14g，M的标准差

$$u_1=\sqrt{0.4^2+0.2^2+0.2^2})=0.5$$

②　天平变动性引起的不确定度

用多次重复测量同一钢球后统计计算。将该球用天平重复称量，得量值（以g为单位）

14,00038,	14,00039,	14,00040,	14,00047,
14,00038,	14,00034,	14,00042,	14,00050,
14,00041,	14,00044,	14,00035,	

用贝塞尔法计算得一次测量标准差

$$S_1=\sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n})}=0.05g$$

(自由度$v=10$)

(最大残差法算$S_1=Cn\quad V_{max}=0.56\times 0.09=0.05mg$)

③　天平标尺示值误差引起的不确定度

天平标尺示值为$100\times 0.1mg$，允许误差为$\pm 2\times 0.1mg$，称该球质量时，标尺示值为$4\times 0.1mg$，对应三倍标准差，其误差不大于

$$2\times 0.1\times 4/100=0.008mg$$

而　$u_2=0.008/3=0.003mg$

以上分量互不相关，因而称量合成不确定度

$$\sigma=\sqrt{S_1^2+u_1^2+u_2^2}=0.5mg\quad(=0.0005g)$$

测量结果

m＝14,0004± 0.0005g (一倍标准差)

或　　m＝14,0004± 0.0010g (二倍标准差)

参　考　文　献

1 ISO/RAG4/WG3. Guide to the Expression of uncertainty in physical Measurements. 31 October 1989

2 刘智敏.误差分布论原子能出版社.1988

3 计量技术编辑部.计量技术.No.5.1988

4 国家标准征求意见稿.试验结果分析.不确定度的评定.1985

Error and Uncertainty

Yan Shengxing

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This article has made a breif exposition of using uncertainty instead of error to show the rationality of quality measure. And furthermore, it has discussed the conception, estimation and propagation of uncertainty.

Keywords: error, Uncertainty, Narmal error, Probability