第15卷 第4期 郑 州 工 学 院 学 报 Vol.15 No.4
1994年 12 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Dec. 1994

# 交叉二直线各类最短距离的求解分析*

张爱梅

(郑州工学院)

**摘 要**: 本文利用平行基面，对交叉二直线的投影特点及其最短距离之求解进行分析，为其在工程实际中应用提供方便的手段。

**关键词**: 交叉二直线，平行基面，最短距离

**中图分类号**: TH126

在工程实际中经常遇到交叉二直线的最短距离求解问题，如交叉的矿井巷道、地下各种管线的连接问题、机械工程中的交叉轴传动和计算等等。交叉二直线是异面直线，是个很典型的复杂空间问题，为了能在二维的平面图上直观地进行分析、计算，本文提出了与共面直线相类比的几何模型--平行基面。为探讨求解方法及进一步建立解析式提供方便。

## 1 空间位置特点

交叉二直线属异面直线，无公有点；有距离和夹角的度量问题。

## 2 平行基面的引入

过交叉二直线中的每条直线都可作出平行于对方的平面，这唯一的一对平面叫作平行基面。大家知道，共面二直线可确定唯一一个平面，有关它们的夹角、距离问题可在此平面内解决。而异面直线可确定唯一一对平行基面，则有关它们的夹角、距离问题均可在平行基面内解决。借助平行基面解决有关交叉二直线的问题，使人们的思路清晰，解决问题迅速。

* 收稿日期: 1993-12-22

## 3　投影分析

交叉二直线的投影可能平行，也可能相交。产生这两种现象的条件分析如下：

### 3.1　投影平行

条件：投影方向 S// 平行基面。

因两条直线均平行于平行基面，故若投影方向平行于平行基面，则两平行基面均为投射平面，所以在相应的投影面上投影有积聚性，且互相平行，如图 1。显然，与平行基面平行的投影方向有无穷多个，若改用与平行基面平行的任一方向，均可得一对互相平行的投影，当投影方向平行于一直线时，则该直线的投影积聚为一点，如图 2。我们常取这样的投影方向，以利于研究、解决问题。

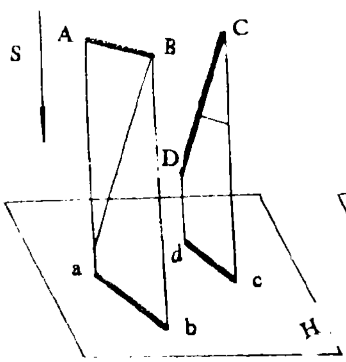


图 1

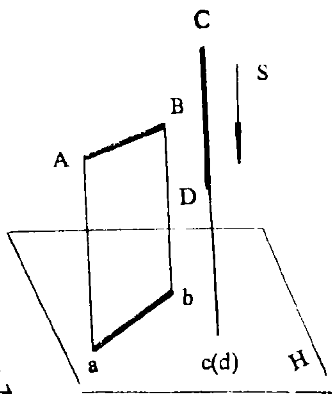


图 2

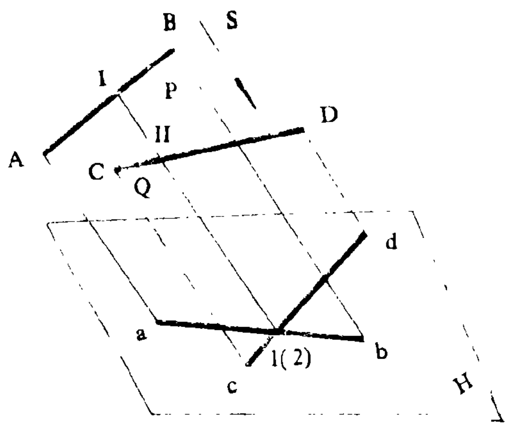


图 3

### 3.2　投影相交

条件：投影方向 S∦ 平行基面。

若投影方向 S∦ 平行基面，则此时投影方向 S 与每条直线所形成的投射平面不相平行；两平行基面均非投射面，且与投射平面不平行，如图 3，两投射平面 P、Q（AB∈P，CD∈Q）// 投影方向 S，但 P∦ Q，故 P⋂Q＝ⅠⅡ// S；ⅠⅡ与 AB 共面，且相交于Ⅰ；ⅠⅡ与 CD 共面，且相交于Ⅱ。Ⅰ、Ⅱ两点为沿 S 方向将二直线连接时的连接点，也就是说，沿投影方向 S，Ⅰ、Ⅱ两点是对相应投影面 H 的重影点，所以投影积聚为一点 1（2），显然，点 1(2)是交叉二直线相应投影 ab、cd 的交点；是投射平面 P、Q、投影面 H 的共有点。

# 4 关于最短距离问题

## 4.1 分类

最短距离——
- 方向分类
  - 公垂线方向
  - 指定方向
    - 水平、正平、侧平方向
    - 定坡度方向
- 位置分类
  - 只度量大小，不计位置
  - 确定大小和位置(连接点定位)

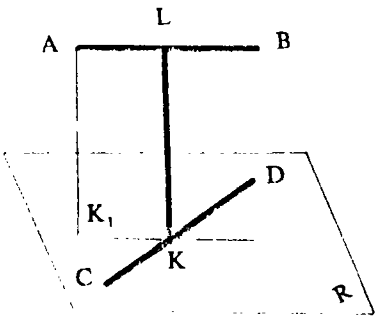
## 4.2 最短垂直距离的求解

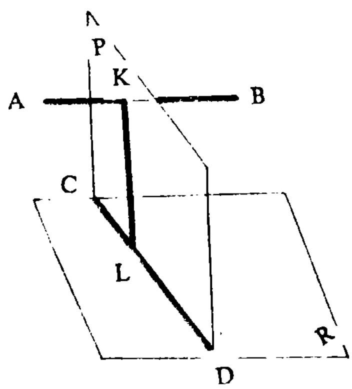
4.2.1 空间分析：公垂线的方向和大小取决于已给定的交叉二直线，因它们保持正交关系，且只有唯一一条。

借助于平行基面，最短距离的解题方案可有如下三种：

方案一，(见图 4)：其步骤如下：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 过 CD 作平行基面 R | 求平行基面间(或一直线与平平基面间)距离 $AK_1$——最短距离 | 求垂足 $K_1$ 在 R 内沿// AB 方向移动轨迹 $KK_1$ $K_1K\cap CD=K$ | 过 K 作 KL// $AK_1$, $KL\cap AB=L$, KL 即为所求 |



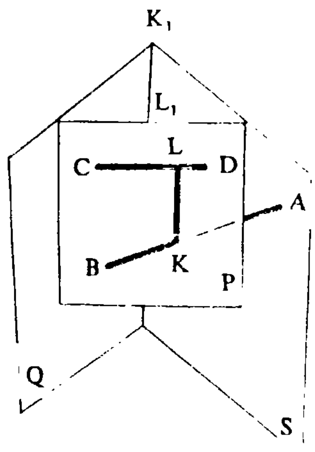




图 4　　图 5　　图 6

方案二，(见图 5)，其步骤为：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 过 CD 作平行基面 R | 过 CD 作 R 的垂面 P | 求 $AB\cap P$ $=K$ | 过 K 作 KL⊥R, $KL\cap CD=L$, KL 即为所求 |

方案三，（见图 6），其步骤流程图为：

过 A 作面 $S \perp AB$ → 过 C 作面 $Q \perp CD$ → 求 $S \cap Q = K_1L_1$（垂线方向） → 过 CD 作面 $P // K_1L_1$ → 求 $AB \cap P = K$ → 过 K 作 $K_1L_1 // K_1L_1$，$K_1L_1$ 即为所求

$K_1L_1 \perp \begin{matrix} AB \\ CD \end{matrix}$

$K_1L_1 \perp R$
（平行基面）

$P(CD) \perp R$
（平行基面）

在上述各方案中，方案一可先求得最短距离的大小，是最基本的方法；方案二先求一个垂足，再定 KL 方向；方案三先求 KL 方向，再定垂足。

4.2.2　投影分析及作图：作图的繁简程度与平行基面相对于投影面的位置密切相关。

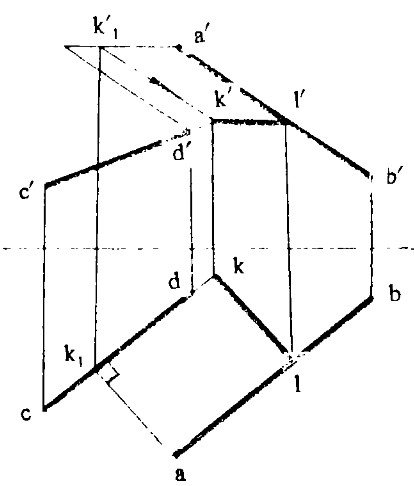



图 7

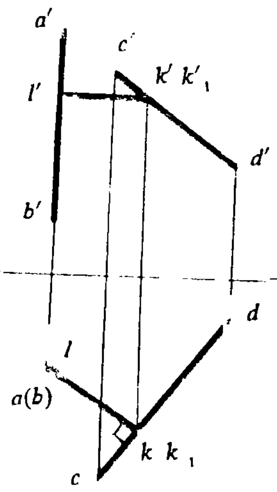



图 8

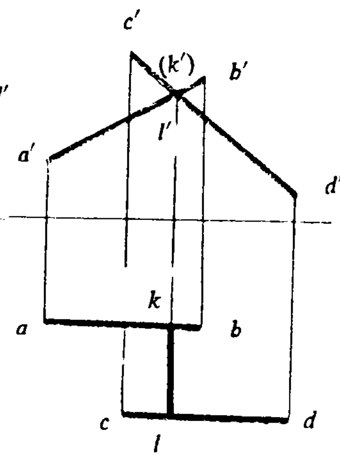



图 9

①平行基面为一般位置：用上述三方案中任一个解题，过程都比较繁琐，因此准确度受到影响；

②平行基面为投影面垂直面：在与平行基面平行的无数个方向中取与投影面垂直的方向作为投影方向 S，此时平行基面在相应投影面内积聚为一对平行直线，所以交叉二直线在该投影面内的投影一定平行。这时用上述各方案解题时，过程就比较简单，如图 7。

当投影方向与一直线平行时，在正投影中也就是有一直线垂直于投影面，平行基面也是投影面垂直面，此时一直线与平行基面间的公垂线为投影面平行线，这时用上述方案解题更简单，如图 8。

③平行基面为投影面平行面时：如图 9，平行基面为正平面，显然此时的公垂线 KL

为正垂线，所以 V 影上之投影交点即为 KL 的积聚性投影 $k^1l^1$。

通过以上的分析可知：当平行基为一般位置时，可先通过投影变换（换面法、旋转法等）把它转化为有利于解题的位置（投影面垂直面或投影面.平行面），然后再用上述方案解题，过程就比较简单。这一结论也适用于以下的情况。

4.3 最短定方向距离——最短水平、正平、定坡度距离等。

4.3.1 空间位置

指定交叉二直线之间最短连线的方向，答案有无数条，这无数条线构成一个不可展的双曲抛物面，其中必有一条最短，且这条最短线只与交叉二直线保持相交关系。

4.3.2 投影分析及作图方法：

①最短投影面平行线连线：现以求交叉二直线间的最短水平连线为例说明求解方法。

方案一，如图 10：

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 求 P 与平行基面 | 求连接点的作图原理： |
| | | 之交线ⅠⅡ、ⅢⅣ， | 过Ⅰ（∈AB）引 IS⊥ⅢⅣ， |
| 作平行 | 任意引人 | 此二交线间的 | 过 S 作 SN// AB，SN⋂CD＝N， |
| 基　面 | 水平面 P | 距离即为最短 | 过 N 作 MN// IS，MN⋂AB＝M， |
| | | 水平距离 | MN 即为所求，mn 反映实长 |

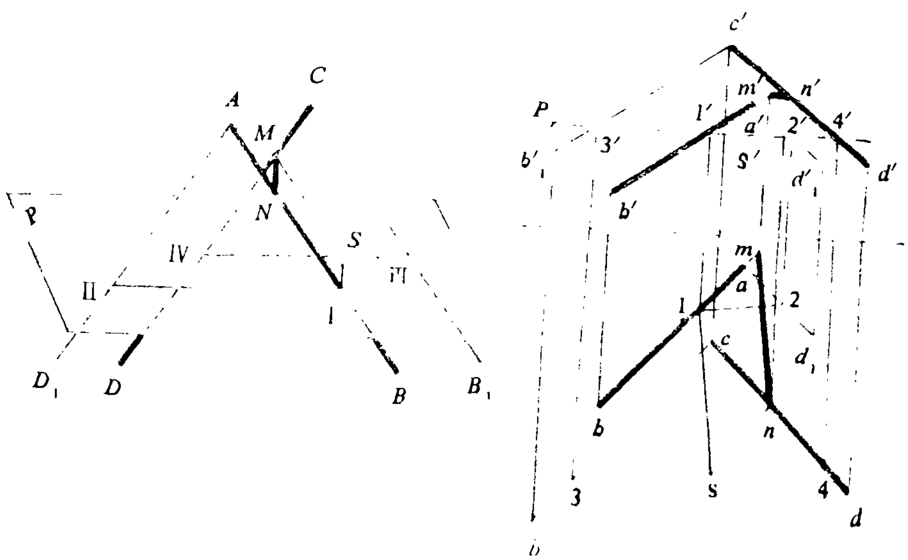



图 10

当平行基面为特殊位置平面时，作图就比较简单（略）。

方案二：用斜投影法求最短水平连线，如图 11。

因为 H 面是一个特殊的水平面，所以可选投影方向 S，使与 AB 或 CD 平行（图 11

中 S// CD)，求出它们在 H 面上（只能是 H 面）的斜投影 $C_hd_h$，$a_hb_h$，此时 $c_hd_h$ 积聚。而 $a_hb_h$ 为平行基面的积聚性投影，最短水平距离为 $c_hm_h$，MN 即为最短水平连线。

②最短定坡度距离：据前述的投影分析，当投影方向 S 平行基面时，交叉二直线在相应投影面上的投影相交，且投影之交点为沿 S 方向将二直线连接时的连接点之投影。故欲求交叉二直线间的最短定坡度连线，其解题思路如下，如图 12。

设 $\alpha=45$，$\beta=30$

| | | |
|---|---|---|
| 过空间任一点作一直线 EF 使 $\alpha$、$\beta$ 为给定值 | 沿投影方向 EF 将 AB、CD 向某一投影面（H）投影，得 $m_hn_h$ | 将 $m_hn_h$ 返回原体系即可 |

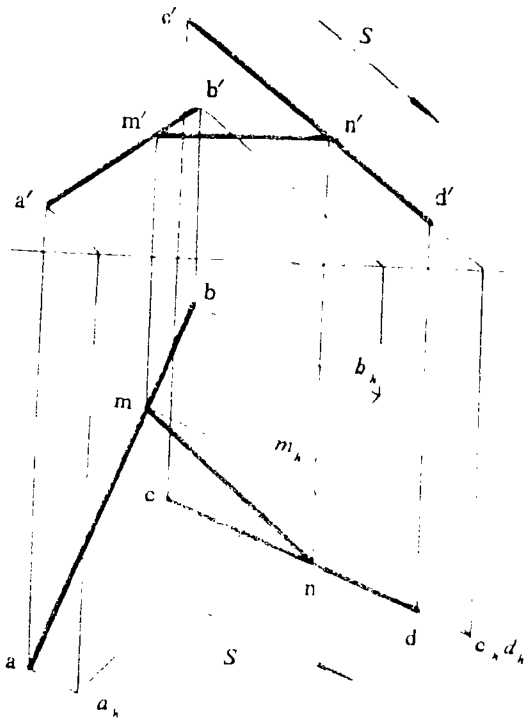



图 11

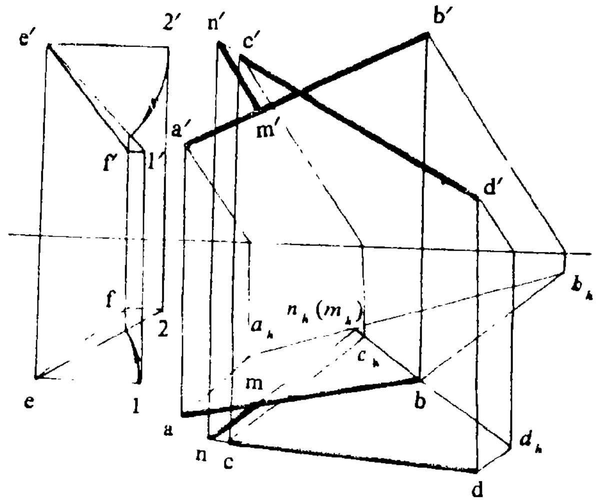



图 12

## 参 考 文 献

1 孙伯鲁著: 高等画法几何学. 郑州工学院教材科.
2 朱辉. 曹桄. 张士良. 徐吕炎等著: 高等画法几何学. 上海科技出版社.

# Solution Analyse About the Shortest Distance Between two Crossed Lines

Zhang Aimei
(Zhengzhou Institute of Technology)

**Abstract:** In this paper, the characters of the projection of two crossed lines and the sloution about the shortest distance between them are analysed by useing parallel basic plane. The conclusions give some convenient methods for procitcal use in engineering.

**Keywords:** two crossed lines, parallel basic plane