第15卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.15 No.3
1994年 9 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1994

广义特征子空间与 Jordan 链：构造 Jordan 标准形的一个新途径*

刘江国

(郑州工学院数力系)

摘 要: 本文从Cayley-Hamilton定理出发，讨论了特征（最小）多项式的因式分解与空间的不变子空间直和分解之间的关系。据此，引入了广义特征子空间序列 $null(T-\lambda_0 I)^i$ 及 Jordan 链的概念，并深入讨论了它们的性质。由此得到了一个构造 Jordan 标准形的新方法。新方法简洁、高效，可以方便地在计算机上实现，与传统的由初等因子构造 Jordan 标准形的方法相比较，优越许多。

关键词: 广义特征子空间，Jordan 链，Jordan 标准形
中图分类号: O151

如何适当地选取线性空间的基底，使得线性变换的表示矩阵具有较简单的形式（或求方阵的相似标准形）是线性代数的一个基本问题。传统的论著均通过引入特征向量、特征值的几何重数与代数重数、最小多项式、λ-矩阵及其不变因子、初等因子等概念和工具对此进行讨论，因此理论冗长、逻辑不清晰、方法难于实施，本文从一个新的角度讨论了此问题。

在本文中，除特别指明外，总作如下假定：

记 V 为数域 F 上的 n 维线性空间，T 为 V 上的线性变换，λ_0 为 T 在数域 F 上的特征值，$f(\lambda)$，$p(\lambda)$分别为 T 的特征多项式与最小多项式；

用$\subseteq$表示子空间的包含关系，$\subset$表子空间的真包含关系，$\oplus$表子空间的直和；

用 I 表示线性空间上的恒等变换或单位方阵；

若 S 为 V 上的线性变换，则用 null(S)表示 S 的核即 $null(S)=\{x|x\in V, Sx=0\}$，用 range(S)表 S 的象即 $range(S)=\{Sx|x\in V\}$。

定义 0.1 设 λ_0 为 T 在数域 F 上的特征值，$f(\lambda)$为 T 的特征多项式。若

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k g(\lambda), \qquad ((\lambda-\lambda_0)^k, g(\lambda))=1$$

则称 k 为 λ_0 的代数重数。

* 收稿日期: 1993-08-28

定义0.2　称子空间$null(T-\lambda_0 I)$为T的属于特征值λ_0的特征子空间，称$l=\dim(null(T-\lambda_0 I))$为$\lambda_0$的几何重数。

因为特征多项式与最小多项式有相同的根（除重数外），所以我们可作如下的

定义0.3　设$\lambda_0\in F$为T的特征值，若T的最小多项式可在数域F上分解为

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^r q(\lambda),\qquad ((\lambda-\lambda_0)^r,\ q(\lambda))=1$$

则称r为λ_0的最小重数。

由最小多项式整除特征多项式的事实可推出：特征值的最小重数 $r<$ 代数重数 k。

引理 1　若 S 为 V 上的线性变换，null(S)，range(S)分别为 S 的核与象，则

$$\dim(null(S))+\dim(range(S))=\dim(V)$$

证明可在[1]或[2]中找到。

引理 2　设 T 为 V 上的线性变换，$f(\lambda)$为 T 的特征多项式，V_i为 T 的不变子空间，

若　$V=V_1\oplus V_2$

则　$f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)$

其中$f_i(\lambda)$为$T_i=T|_{V_i}$即T在V_i上诱导出的线性变换的特征多项式($i=1,\ 2$)。

证明　因V_1，V_2为T的不变子空间，所以可选择V_1，V_2的基底B_1，B_2组成V的基底B，使T在B下的表示矩阵成为分块对角阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$$

其中A_i为T_i在B_i下的表示矩阵($i=1,\ 2$)。于是有

$$f(\lambda)=det(\lambda I-A)=det(\lambda I_1-A_1)det(\lambda I_2-A_2)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)$$

1　特征（最小）多项式的因式分解与空间的直和分解

定理 1　设 V 上的线性变换 T 的特征多项式有如下的因式分解：

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k g(\lambda),\qquad ((\lambda-\lambda_0)^k,\ g(\lambda))=1$$

则空间V有如下的直和分解：　$V=null(T-\lambda_0 I)^k\oplus null(g(T))$

其中$null(T-\lambda_0 I)^k$，$null(g(T))$为T的不变子空间。

证明　记$V_1=null(T-\lambda_0 I)^k$，$V_2=null(g(T))$。

若$\alpha\in V_1$，则$(T-\lambda_0 I)^k\alpha=0$，由$T$的多项式的可交换性得

$$(T-\lambda_0 I)^k(T\alpha)=T((T-\lambda_0 I)^k\alpha)=0$$

所以$T\alpha\in V_1$，V_1为T的不变子空间。

同理可证，V_2亦为T的不变子空间。

①因为$((\lambda-\lambda_0)^k, g(\lambda))=1$，所以存在多项式$u(\lambda)$，$v(\lambda)$使得

$$u(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^k+v(\lambda)g(\lambda)=1$$

$$u(T)(T-\lambda_0 I)^k+v(T)g(T)=I$$

对$\forall\alpha\in V$，有 $\alpha=u(T)(T-\lambda_0 I)^k\alpha+v(T)g(T)\alpha$

令$\alpha_2=u(T)(T-\lambda_0 I)^k\alpha$，$\alpha_1=v(T)g(T)\alpha$，则 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

由Cayley－Hamilton定理及T的多项式的可交换性

$$(T-\lambda_0 I)^k\alpha_1=(T-\lambda_0 I)^k v(T)g(T)\alpha=v(T)(T-\lambda_0 I)^k g(T)\alpha=v(T)f(T)\alpha=0$$

所以，$\alpha_1\in V_1$。同理，$\alpha_2\in V_2$。

所以，对$\forall\alpha\in V$，有$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_i\in V_i(i=1, 2)$。

②设有$0=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_i\in V_i(i=1, 2)$，但$\alpha_1\neq 0$。

因$\alpha_1=-\alpha_2$，所以$\alpha_1\in V_2$，$g(T)\alpha_1=0$，从而

$$\alpha_1=u(T)(T-\lambda_0 I)^k\alpha_1+v(T)g(T)\alpha_1=0$$

矛盾。这表明：若$\alpha_1+\alpha_2=0$，$\alpha_i\in V_i$ $(i=1, 2)$，必有$\alpha_1=\alpha_2=0$。

综合①②得$V=null(T-\lambda_0 I)^k\oplus null(g(T))$。

定理2 设V上的线性变换T的最小多项式$p(\lambda)$有因式分解

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^r q(\lambda),\quad ((\lambda-\lambda_0)^r,\ q(\lambda))=1$$

则 $V=null(T-\lambda_0)^r q(\lambda),\oplus null(q(T))$

且$null(T-\lambda_0 I)^r$，$null q(T)$为T有不变子空间。

证明 证法同上，用到$p(T)=0$的事实。

当数域F为复数域时，特征多项式与最小多项式可以分解为一次因式幂的乘积，我们有如下的定理3和定理4。

定理3 设V为复数域C上的线性空间，T为V上的线性变换，T的特征多项式有如下的完全因式分解

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$$

则 $V=null(T-\lambda_1 I)^{k_1}\oplus null(T-\lambda_2 I)^{k_2}\oplus\cdots\oplus null(T-\lambda_m I)^{k_m}$

其中$null(T-\lambda_i I)^{k_i}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 为T的不变子空间。

证明

记$V_i=null(T-\lambda_i I)$，令$f_i(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}}$，$i=1, 2, \cdots, m$

①因为$(f_1, f_2, \cdots, f_m)=1$，所以存在多项式$g_1(\lambda)$，$g_2(\lambda)$，$\cdots$，$g_m(\lambda)$使得

$$g_1 f_1+g_2 f_2+\cdots+g_m f_m=I$$

$$g_1(T)f_1(T)+g_2(T)f_2(T)+\cdots+g_m(T)f_m(T)=I$$

对$\forall\alpha\in V$，有　$\alpha=g_1(T)f_1(T)\alpha+g_2(T)f_2(T)\alpha+\cdots+g_m(T)f_m(T)\alpha$

记　$\alpha_i=g_i(T)f_i(T)\alpha$　　$(i=1,2,\cdots,m)$，则

$$(T-\lambda_i I)^{k_i}\alpha_i=g_i(T)(T-\lambda_i I)^{k_i}f_i(T)\alpha=g_i(T)f(T)\alpha=0$$

所以$\alpha_i\in V_i$，$i=1,2,\cdots,m$。

②设有　$0=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$，$\alpha_i\in V_i$，$i=1,2,\cdots,m$。

因为当$j\neq i$时，$(\lambda-\lambda_j)^{k_j}|f_j(\lambda)$，所以$f_i(T)\alpha_j=0$. 从而

$$0=f_i(T)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)=f_i(T)\alpha_i$$

由$((\lambda-\lambda_i)^{k_i},f_i(\lambda))=1$知，存在多项式$u(\lambda)$，$v(\lambda)$使得

$$u(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{k_i}+v(\lambda)f_i(\lambda)=1$$

$$u(T)(T-\lambda_i I)^{k_i}+v(T)f_i(T)=I$$

所以有　$\alpha_i=u(T)(T-\lambda_i I)^{k_i}\alpha_i+v(T)f_i(T)\alpha_i=0$，$i=1,2,\cdots,m$.

由①②知：对$\forall\alpha\in V$，可将其表为

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$，　$\alpha_i\in null(T-\lambda_i I)^{k_i}$　$(i=1,2,\cdots,m)$

且表示式是唯一的。

所以　$V=null(T-\lambda_1 I)^{k_1}\oplus null(T-\lambda_2 I)^{k_2}\oplus\cdots\oplus null(T-\lambda_m I)^{k_m}$

定理4　假设同定理3，若T的最小多项式有完全因式分解

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_m I)^{r_m}$$

则　$V=null(T-\lambda_1 I)^{r_1}\oplus null(T-\lambda_2 I)^{r_2}\oplus\cdots\oplus null(T-\lambda_m I)^{r_m}$

其中$null(T-\lambda_i I)^{r_i}$为$T$的不变子空间$(i=1,2,\cdots,m)$.

可以看出，本文为定理 3，4 提供的证明比[1][2]简洁.

2　广义特征子空间及其维数

定理 1，2 及定理 3，4 分别提供了两种不同的直和分解，为讨论这两种直和分解的关系，引入广义特征子空间的概念。

定义 1　设 V 为数域 F 上的线性空间，T 为 V 上的线性变换，$\lambda_0\in F$ 为 T 的特征值，称 $null(T-\lambda_0 I)^i$　$(i=1,2,\cdots)$ 为 T 的属于 λ_0 的 i 级广义特征子空间.

1 级广义特征子空间即为通常意义的特征子空间。

定理 5　设 λ_0 为 T 的特征值，r 为其最小重数，k 为其代数重数，i 为正整数，则

① 当 $i>r$ 时，$null(T-\lambda_0 I)^i=null(T-\lambda_0 I)^r$

特别地，$null(T-\lambda_0 I)^k = null(T-\lambda_0 I)^r$

②当$i<r$时，$null(T-\lambda_0 I)^i \subset null(T-\lambda_0 I)^r$

③$null(T-\lambda_0 I)^r = \bigcup_{i=1}^{\infty} null(T-\lambda_0 I)^i$

④$null(T-\lambda_0 I) \subset null(T-\lambda_0 I)^2 \subset \cdots \subset null(T-\lambda_0 I)^r$

证明　记$p(\lambda)$为T的最小多项式，令$h(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^i q(\lambda)$

①当$i>r$时，$h(\lambda)$为T的零化多项式，$h(T)=0$。与定理1的证明类似，可证明

$$V = null(T-\lambda_0 I)^i \oplus null(q(T))$$

而由定理2有　$V = null(T-\lambda_0 I)^r \oplus null(q(T))$

所以当$i>r$时　$null(T-\lambda_0 I)^i = null(T-\lambda_0 I)^r$

② 用反证法　假设存在某个$i<r$使得$null(T-\lambda_0 I)^i = null(T-\lambda_0 I)^r$

由定理2知，对$\forall \alpha \in V$有　$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，　$(T-\lambda_0 I)^r\ \alpha_1=0$，　$q(T)\alpha_2=0$

因为$null(T-\lambda_0 I)^i = null(T-\lambda_0 I)^r$，所以有$(T-\lambda_0 I)^i\alpha_1=0$，于是有

$$h(T)\alpha = h(T)\alpha_1 + h(T)\alpha_2 = q(T)(T-\lambda_0 I)^i\alpha_1 + (T-\lambda_0 I)^i q(T)\alpha_2 = 0$$

即$h(\lambda)$为T的零化多项式，但$\deg(h(\lambda))<\deg(p(\lambda))$。这与$p(\lambda)$为最小多项式矛盾，所以②成立。

③综合①②即得。

④用反证法　假设存在$m<r$，使得

$null(T-\lambda_0 I)^{m-1} \subset null(T-\lambda_0 I)^m = null(T-\lambda_0 I)^{m+1}$

（为完备记，约定$(T-\lambda_0 I)^0=I$，$null(T-\lambda_0 I)^0=\{0\}$即零子空间）

这表明：对$\forall \alpha\in V$，只要$(T-\lambda_0 I)^{m+1}\alpha=0$，就有$(T-\lambda_0 I)^m\alpha=0$

对$\forall \beta\in null(T-\lambda_0 I)^r$，令$\alpha=(T-\lambda_0 I)^{r-m-1}\beta$，则$(T-\lambda_0 I)^{m+1}\alpha=0$，

于是有　$(T-\lambda_0 I)^m\alpha=0$，　$(T-\lambda_0 I)^{r-1}\beta=(T-\lambda_0 I)^m\alpha=0$

从而　$null(T-\lambda_0 I)^{r-1} = null(T-\lambda_0 I)^r$

这与结论②矛盾，所以④成立。

结合引理1，可得到如下的

推论　$range(T-\lambda_0 I) \supset range(T-\lambda_0 I)^2 \supset \cdots \supset range(T-\lambda_0 I)^r$

定理6　$\dim(null(T-\lambda_0 I)^r) = \dim(null(T-\lambda_0 I)^k) = k$

其中r，k分别为特征值λ_0的最小重数与代数重数。

证明　由定理1知　$V = null(T-\lambda_0 I)^k \oplus null(g(T))$

记$V_1 = null(T-\lambda_0 I)^k$，$V_2 = null(g(T))$，$T_i = T|_{V_i}$，$f_i(\lambda)$为$T_i$的特征多项式

(i= 1，2)。

由引理2知　　$f(\lambda)= f_1(\lambda)f_2(\lambda)$

在 V_1 上，$(T-\lambda_0 I)^k = 0$，所以 $(\lambda-\lambda_0)^k$ 为 T_1 的零化多项式，从而 T_1 的最小多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^m$($m\leqslant k$，为某个正整数)，T_1 的特征多项式 $f_1(\lambda)= (\lambda-\lambda_0)^d$，$d= \dim(null(T-\lambda_0 I)^k)$

对 $f_2(\lambda)$，$((\lambda-\lambda_0),\ f_2(\lambda))= 1$。若不然，则 $(\lambda-\lambda_0)|f_2(\lambda)$. 从而 $(\lambda-\lambda_0)$ 整除 T_2 的最小多项式．而在 V_2 上，$g(T)= 0$，所以 $g(\lambda)$ 为 T_2 的零化多项式。于是有

$(\lambda-\lambda_0)|g(\lambda)$，这与$((\lambda-\lambda_0),\ (\lambda))= 1$矛盾。

综上所述得

$$f(\lambda)= (\lambda-\lambda_0)^k g(\lambda)= (\lambda-\lambda_0)^d f_2(\lambda)$$
$$((\lambda-\lambda_0),\ g(\lambda))= ((\lambda-\lambda_0),\ f_2(\lambda))= 1$$

所以$k= d$，即$k= \dim(null(T-\lambda_0 I)^k)$。

定理 5，6 进一步揭示了特征（最小）多项式的因式分解与空间分解为广义特征子空间的直和之间的关系，同时也深入地揭示了特征值的几种重数之间的关系:

①特征值的几何重数$l\leqslant$ 代数重数k;

② 当 i= 1 时，广义特征子空间 $null(T-\lambda_0 I)^i$ 就是特征子空间 $null(T-\lambda_0 I)$，其维数就是特征值的几何重数 l，$l\leqslant k$。随着 i 的增大，$null(T-\lambda_0 I)^i$ 及其维数都增大，当 $i = r$ 时，等号成立，即 $\dim(null(T-\lambda_0 I)^r)= k$。$r$ 是使该等式成立的最小正整数。

文[4]用很初等的方法，(矩阵的秩）证明了结论①．本文又给出了一个不用矩阵的证明方法，且更清晰地揭示了特征值的几种重数之间的关系。

3　Jordan 链

依据定理 5 所阐述的广义特征子空间之间的关系，可以构造出非常有用的 Jordan 链。

定义2　对$x_1\in null(\lambda_0 I)$，$x_1\neq 0$，求解:

$$(T-\lambda_0 I)x_2 = x_1$$
$$(T-\lambda_0 I)x_3 = x_2$$

直至　　$(T-\lambda_0 I)x_{j+1} = x_j$　无解。

称 x_1，x_2，…，x_j 为 T 的属于特征值 λ_0 的以 x_1 为起点、长度为 j 的 Jordan 链，记

为 $J(x_1, j)$，称 $x_i(i=1, 2, \cdots, j)$ 为此 Jordan 链的第 i 级向量.

由定义知，$x_1, x_2, \cdots, x_j$ 均为非零向量；除 x_1 外，其余都不是 T 的属于 λ_0 的特征向量；且 $x_i \in null(T-\lambda_0 I)^i$，但 $x_i \in null(T-\lambda_0 I)^{i-1}(i=1, 2, \cdots, j)$

定理7 Jordan链的最大长度为r，r 为 λ_0 的最小重数.

证明 用反证法，假设存在Jordan链$J(x_1, j)$，$j \geqslant r+1$.

根据上述分析，存在$x_{r+1} \neq 0$ $x_{r+1} \in null(T-\lambda_0 I)^{r+1}$，但$x_{r+1} \in null(T-\lambda_0 I)^r$

这表明 $null(T-\lambda_0 I)^r \subset null(T-\lambda_0 I)^{r+1}$与定理5①的结论矛盾.

显然，Jordan链的最小长度$\geqslant 1$.

定理8 存在长度为r的Jordan链.

证明 不妨设$r>1$，取$x \neq 0$，$x \in null(T-\lambda_0 I)^r$但$x \in null(T-\lambda_0 I)^{r-1}$，令

$$x_r = x$$
$$x_{r-1} = (T-\lambda_0 I)x_r$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 = (T-\lambda_0 I)x_2$$

由 $x_r = x$ 的取法知 $x_r \in null(T-\lambda_0 I)$，所以 $x_{r-1} = (T-\lambda_0 I)x_r \neq 0$.

$x_{r-1} \in null(T-\lambda_0 I)^{r-1}$， 但$x_{r-1} \in null(T-\lambda_0 I)^{r-2}$

依次递推，可得出 $x_1 \neq 0$, $(T-\lambda_0 I)x_1 = 0$.

这样，$x_1, x_2, \cdots, x_r$就组成了一个Jordan链.

定理9 Jordan链中的向量线性无关.

证明 对向量的个数i 用归纳法证明.

$i=1$时，显然.

设$i=m$时成立，考查$i=m+1$时的情形.

假若有 $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1} = 0$

则由
$$(T-\lambda_0 I)c_1 x_1 = 0$$
$$(T-\lambda_0 I)c_2 x_2 = c_2 x_1$$
$$,$$
$$(T-\lambda_0 I)c_m x_m = c_m x_{m-1}$$
$$(T-\lambda_0 I)c_{m+1} x_{m+1} = c_{m+1} x_m$$

得
$$c_2 x_1 + \cdots + c_m x_{m-1} + c_{m+1} x_m = 0$$

由归纳假设得 $c_2 = \cdots = c_{m+1} = 0$，代入原式得 $c_1 x_1 = 0$，$c_1 = 0$.

所以，$x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}$线性无关.

定理 10 取 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为 $null(T-\lambda_0 I)$ 中的一组线性无关的向量，

以 x_1, x_2, …, x_m 为起点向量分别构造 Jordan 链．则

①这m个Jordan链的所有同级向量线性无关．

②这m个Jordan链的所有$\leqslant i$级的向量线性无关($i = 1, 2, \cdots, r$).

③这m个Jordan链的并（即其中所有各级向量构成的向量组）线性无关．

证明　只需证③．为书写方便，就$m=2$的情形证明．

设Jordan链分别如下:

$$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1j1}$$

$$x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2j2}$$

假设有c_{11}, c_{12}, …, c_{1j_1}, c_{21}, c_{22}, …c_{2j_2} 使得

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1j_1}x + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots + c_{1j_1}x_{1j_1} = 0 \qquad (*)$$

不防设$j_1 = j_1 = j$. 在上式两边作用以$(T-\lambda_0 I)^{j-1}$.

得$(T-\lambda_0 I)^{j-1}(c_{1j}x_{1j} + c_{2j}x_{2j}) = 0$

即　$c_{1j}x_{11} + c_{1j}x_{21} = 0$

而x_{11}, x_{21}线性无关，所以$c_{1j} = c_{2j} = 0$.

将$c_{1j} = c_{2j} = 0$代入($*$)式，再分别作用以$(T-\lambda_0 I)^{j-2}$可得

$$c_{1,j-1} = c_{2,j-1} = 0$$

依次递推得　$c_{11} = c_{12} = \cdots = c_{1j} = 0$

$$c_{21} = c_{22} = \cdots = c_{2j} = 0$$

当$j_1 \neq j_2$时，取$j = \max(j_1, j_2)$, 认为（$*$）式中缺项即可．

所以x_{11}, x_{12}, …, x_{1j_1}, x_{21}, x_2, …, x_{2j_2}线性无关．

在构造Jordan链时，随着起点向量的变化，链的长度也不尽相同．易见:

Jordan 链的长度 $\geqslant i$ 的充要条件是其起点向量在 $\mathrm{null}(T-\lambda_0 I)\bigcap \mathrm{range}(T-\lambda_0 I)^{i-1}$ 中;

Jordan 链的长度 $= i$ 的充要条件是其起点向量在差集 $(\mathrm{null}(T-\lambda_0 I)\bigcap \mathrm{range}(T-\lambda_0 I)^{i-1})\diagdown(\mathrm{null}(T-\lambda_0 I)\bigcap \mathrm{range}(T-\lambda_0 I)^{i})$ 之中．

注: $\mathrm{null}(T-\lambda_0 I)\bigcap \mathrm{range}(T-\lambda_0 I)^{r} = \{0\}$.

引理 3　记 W 为 $\mathrm{null}(T-\lambda_0 I)^{i-1}$ 在 $\mathrm{null}(T-\lambda_0 I)^{i}$ 中的直和补 ($i = 1, 2, \cdots, r$),

则　$(null(T-\lambda_0 I)\bigcap range(T-\lambda_0 I)^{i-1}) \subseteq W$

从而　$dim(null(T-\lambda_0 I)\bigcap range(T-\lambda_0 I)^{i-1})$

$$= dim(null(T-\lambda_0 I)^{i}) - dim(null(T-\lambda_0 I)^{i-1})$$

证明　对 $\forall x\in \text{null}(T-\lambda_0 I)\bigcap \text{range}(T-\lambda_0 I)^{i-1}$，存在 y 使得 $(T-\lambda_0 I)^{i-1}y=x$.
又 $(T-\lambda_0 I)x=0$，所以 $(T-\lambda_0 I)^i y=0$，从而 $y\in \text{null}(T-\lambda_0 I)^i$。

因　$$null(T-\lambda_0 I)^i = W\oplus null(T-\lambda_0 I)^{i-1}$$

所以y可唯一地分解为　$y=\alpha+\beta$,　$\alpha\in W$,　$\beta\in \text{null}(T-\lambda_0 I)^{i-1}$

显然 $x=(T-\lambda_0 I)^{i-1}y=(T-\lambda_0 I)^{i-1}\alpha$。

作 $(\text{null}(T-\lambda_0 I)\bigcap \text{range}(T-\lambda_0 I)^{i-1})$ 到 W 的映射：$x\to\alpha$，可证明此映射是单射，是满射，且保持线性关系，所以这两个线性空间同构。

定理 11　可以适当地选取 $null(T-\lambda_0 I)$ 的基底作为起点向量构造 Jordan 链，使得这些 Jordan 链的所有 $\leqslant i$ 级的向量组成 $null(T-\lambda_0 I)^i$ 的一个基底 ($i=$ ，2，…，r)。

证明　记 $U_i=\text{null}(T-\lambda_0 I)\bigcap \text{range}(T-\lambda_0 I)^i$　($i=1, 2, \cdots, r$). 由定理 5 的推论知　$null(T-\lambda_0 I)=U_0\geqslant U_1\geqslant U_2\geqslant\cdots\geqslant U_{r-1}\geqslant U_r=\{0\}$

记 W_i 为 U_i 在 U_{i-1} 中的直和补 ($i=1, 2, \cdots, r-1, r$)，取 W_i 的一个基底作为起点向量，构造 Jordan 链。则在这组 Jordan 链中，i 级向量的个数为
$\dim(\text{null}(T-\lambda_0 I)\bigcap \text{null}(T-\lambda_0 I)^{i-1})=\dim(\text{null}(T-\lambda_0 I)^i)-\dim(\text{null}(T-\lambda_0 I)^{i-1})$ 从而所有 $\leqslant i$ 级的向量的个数为 $\dim(\text{null}(T-\lambda_0 I)^i)$。然而所有 $\leqslant i$ 级的向量均在 $\text{null}(T-\lambda_0 I)^i$ 中且线性无关，所以它们组成 $\text{null}(T-\lambda_0 I)^i$ 的一个基底。

定理 12　记 $d_i=\dim(\text{null}(T-\lambda_0 I)^i$　($i=0, 1, 2, \cdots, r$)，r 为 λ_0 的最小重数，l 为 λ_0 的几何重数。若 $\text{null}(T-\lambda_0 I)^r$ 的一个基底由若干个 Jordan 链的并组成，则

① 这些 Jordan 链中所有 $\leqslant i$ 级的向量构成 $\text{null}(T-\lambda_0 I)^i$ 的一个基底；

② 这些 Jordan 链中所有 $\leqslant i$ 级的向量的个数为 d_i；所有 i 级的向量的个数为 d_i-d_{i-1}；

③Jordan链的个数为l;

④ 长度至少为 i 的 Jordan 链的个数为 $e_i=d_i-d_{i-1}$；长度为 i 的 Jordan 链的个数为 $c_i=e_i-e_{i+1}$. ($i=1, 2, \cdots, r$)，（约定 $d_o=0$, $e_{r+1}=0$)。

证明 应用定理 10 的结论，按定义可证得①。
依据①及计数知识可得②③④。

4　构造 Jordan 标准形的新方法

根据以上的分析，我们可以得到一个构造 Jordan 标准形的新方法。
由以上的讨论得知，$\text{null}(T-\lambda_0 I)^r$是满足如下条件的最大子空间：

W为T的不变子空间，且$T|_w$即T在W上的限制以λ_0为唯一特征值。

定理11表明，可适当地取null(T－ λ_0I)的一个基底构造Jordan链，使得Jordan链之并构成null(T－ λ_0I)^{r}的一个基底，T在W＝null(T－ λ_0I)^{r}上诱导出的线性变换在此基底下的表示矩阵是如下形式的分块对角阵（称为属于特征值λ_0的Jordan块）：

$$J_0=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_0) & & & & \\ & J_2(\lambda_0) & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & J_l(\lambda_0) \end{bmatrix}$$

其中$J_i(\lambda_0)$　($i=1, 2, \cdots, l$)是如下的准对角阵:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \cdots & & \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

其阶数是某个Jordan链的长度，称其为属于特征值λ_0的一个小Jordan块。

由定理12知，若不计小Jordan块的顺序，则上述表示矩阵是唯一的。

具体地有:　　小Jordan块的总个数为$l=\dim(\mathrm{null}(T-\lambda_0 I))$;

i阶小Jordan块的个数为$c_i=2d_i-d_{i-1}-d_{i+1}$，$i=1, 2, \cdots, r$.

（其中$d_i=\dim(\mathrm{null}(T-\lambda_0 I)^i)$，　$i=1, 2, \cdots, r$.)

当数域F为复数域时，线性变换T的特征（最小）多项式可分解为一次因式幂的乘积，空间V可分解为不变子空间的直和（定理3，4）．选择null(T－ λ_0I)，null(T－ λ_2I)，…，null(T－ λ_mI)的基底分别构造Jordan链，就可得到m个Jordan块J_1，J_2，…，J_m，从而T的表示矩阵成为

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & J_m \end{bmatrix}$$

这就是Jordan标准形。

若不计Jordan块的次序，则Jordan标准形是唯一的。

对复数域C上的方阵，有类似的结论。

这样我们就得到了一个求Jordan标准形的简便方法:

对复数域上的n阶方阵A，先计算其特征多项式和特征值;

对每一个特征值，求出秩$\operatorname{rank}(A-\lambda_0 I)^i$;

（使得$\operatorname{rank}(A-\lambda_0 I)^{i+1}=\operatorname{rank}(A-\lambda_0 I)^i$成立的最小的$i$就是最小重数$r$）

再求出$d_i(i=1, 2, \cdots, r)$，据此写出属于此特征值的Jordan块;

由Jordan块写出Jordan标准形。

可以看出，用此方法只需要反复求秩$\operatorname{rank}(A-\lambda_0 I)^i$，避免了计算行列式因子，不变因子，初等因子等繁琐的计算。求秩$\operatorname{rank}(A-\lambda_0 I)^i$可以用初等变换的方法，因而可以用计算机来实现，可参考使用软件[5].

参 考 文 献

1 北京大学数学系编. 高等代数. 人民教育出版社,1978年

2 Hoffman K. and Kunze R.. Linear Algebra. 2nd ed., 1971

3 Hall J. I.. Another Elementary Approach to the Jordan Form. Amer. Math. Monthly, 98(1991), 336-340

4 刘江国. 特征值的代数重数<几何重数的新证法. 全国化工系统高校数学学科会论文集, 1993.

5 丁培贵, 陈永华. 计算机辅助线性代数教学系统(软件)(国家教委工科数学课委会指定)

Generalized Eigenspaces and Jordan Chains: A New Approach to the Jordan Canonical Form

Liu Jiangguo
(Zhengzhou Inst. of Tech.)

Abstract: This paper introduces two valuable concepts: generalized eigenspaces and Jordan chains. Some deep results concerning their properties and the relationship among several multiplicities of eigenvalues are also revealed. Compared with traditional ones, the new procedure presented here is more convenient and efficient for constructing the Jordan canonical form.

Keywords: Generalized eigenspaces, Jordan chains, Jordan canonical form.