

厚壁园筒弹塑性的有限元分析*

易恒杰 特布雷克

(郑州工学院) (多伦多大学)

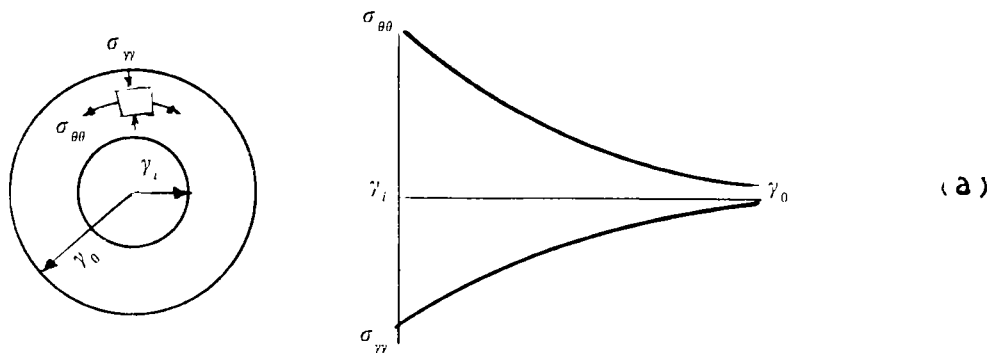
摘 要: 为了更有效地利用材料, 可以采取对厚壁园筒预加压力的方法。本文推导出四种关于厚壁园筒弹塑性分析的有限元公式, 编制了计算园筒弹塑性应力以及确定弹塑性交界面的计算程序, 并列举出大量实例进行比较和分析。

关键词: 弹塑性, 预压力, 有限元法。

中图分类号: O344.3

厚壁园筒在内压力作用时切向应力 $\sigma_{\theta\theta}$ 和径向应力 σ_{rr} 在内壁表面上数值最大, 随着向外壁靠近, 应力数值迅速减小见图 1. (a)。显然, 这种应力分布未充分地利用材料。通常、采用组合园筒可以改善应力分布情况。这种情况下、两个园筒以过盈配合的方法构成一体。装配压力使内筒受到一个初始压缩的切向应力、而外筒受到一个初始拉伸的切向应力。组合园筒在内压作用下的应力应该是上述两种应力的叠加。因此, 这样就降低了内筒的应力而提高了外筒的应力, 使整个应力的分布较为合理。见图 1. (b)。

如果在厚壁园筒内预加压力, 使其在内壁表面产生塑性变形。随着内压力的增加, 塑性变形区逐渐扩大, 园筒达到弹塑性状态。当卸载后, 则将在筒壁内留下残余应力。在以后加载使用时, 和组合厚壁园筒相似, 由于残余应力的存在, 同样会改善沿壁厚应力的分布情况, 见图 1.(c)。承受高压的厚壁园筒有时就采用预加内压的工艺措施。显然, 确定弹性和塑性变形区的交界面位置十分重要。



* 收稿日期: 1994-03-09

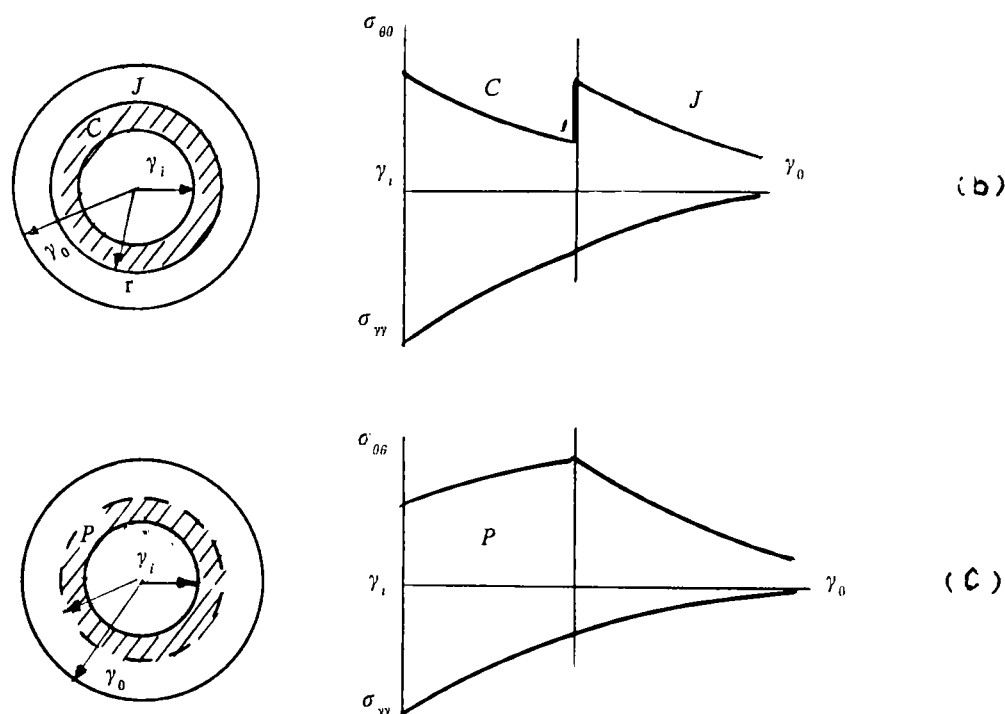


图 1 应力分布 (a) 弹性圆筒 (b) 组合弹性圆筒 (c) 弹塑性圆筒

1 弹性区

在弹性区内其协调方程和平衡方程分别表示为

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_{\theta\theta}) = \varepsilon_{rr} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr}\sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (2)$$

式中各个符号表示常规的意义。现在我们利用应力函数 α 满足平衡方程式。其 α 定义为

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha}{r} \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{d\alpha}{dr} \quad (3)$$

边界条件为

$$\text{在 } r = r_o \quad \sigma_{rr} = 0 \quad \therefore \alpha|_{r=r_o} = 0 \quad (4)$$

$$\text{在 } r = r_i \quad \sigma_{rr} = -p_i \quad \therefore \alpha|_{r=r_i} = -r_i p_i$$

利用应力—应变关系

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) \quad (5)$$

为了简化, 设轴向应力 $\sigma_{zz} = 0$ 。此种情况下, 如枪筒其轴向端是开口的。最后, 利用 α 表示协调方程式 (1) 为

$$r^2 \frac{d^2 \alpha}{dr^2} + r \frac{d\alpha}{dr} - \alpha = 0 \quad (6)$$

为了求解方程式 (6), 使用有限元法。对于一个单元坐标 $r = r_i$ 到 $r = r_j$, 伽辽金法 (The Galerkin method) 的变分式为

$$\delta W_e = \int_{r_i}^{r_j} (r^2 \frac{d^2 \alpha}{dr^2} + r \frac{d\alpha}{dr} - \alpha) \frac{\delta \alpha}{r} dr = \int_{r_i}^{r_j} \delta [-\frac{\alpha^2}{2r} - \frac{r}{2} (\frac{d\alpha}{dr})^2] dr \quad (7)$$

2 弹性区的有限元模型

为了建立有限元模型、首先利用如下的线性函数表示应力函数

$$\alpha(r) = C_1 + C_2 r \quad (8)$$

根据单元节点坐标 r_1 和 r_2 处的节点变量 α_1 和 α_2 表示 $\alpha(r)$ 如下

$$\alpha(r) = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 N_1 和 N_2 形状函数

$$N_1 = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \quad N_2 = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \quad (10)$$

现在把公式 (9) 和 (10) 代入 (7) 中, 可以建立如下的单元 ‘刚度’ 矩阵。

$$[K_e] = \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \begin{bmatrix} r_2^2 \ln(\frac{r_2}{r_1}) - r_1^2 + 2r_1 r_2 - r_2^2 & -r_1 r_2 \ln(\frac{r_2}{r_1}) \\ sym & r_1^2 \ln(\frac{r_2}{r_1}) + r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

以上 $\alpha(r)$ 为线性函数 (8) 式所建立的线性单元模式。为了对比, 我们利用协调方程式 (6) 的精确解建立精确单元模式。在这种情况下, 设应力函数

$$\alpha(r) = d_1 r + \frac{d_2}{r} \quad (12)$$

形状函数则为

$$N_1 = (r_1 r - \frac{r_1 r_2^2}{r}) \frac{1}{(r_1^2 - r_2^2)} \quad N_2 = (-r_2 r + \frac{r_1^2 r_2}{r}) \frac{1}{(r_1^2 - r_2^2)} \quad (13)$$

而刚度矩阵为

$$[K_e] = \frac{1}{(r_1^2 - r_2^2)^2} \begin{bmatrix} r_2^4 - r_1^4 & 2r_1^3 r_2 - 2r_1 r_2^3 \\ sym & r_2^4 - r_1^4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

由于方程式 (6) 是齐次的, 其边界条件仅包括 α , 所以弹性系统刚度方程为

$$[K]_G \{\alpha\}_G = \{0\} \quad (15)$$

式中 $[K]_G$ 是总刚度矩阵, 而式中 α 列阵的某些项是给定值。

3 塑性区

对于塑性区的问题, 将利用屈雷斯加准则 (Tresca Criteria), 其屈服条件如下

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2K \quad (16)$$

式中 K 表示最大剪应力的移限值, $K = \sigma_{yield} / 2$ 。再次利用应力函数 α 满足平衡方程, 并表示屈服条件式(16)为

$$\frac{d\alpha}{dr} - \frac{\alpha}{r} + 2K = 0 \quad (17)$$

为了求解方程式(17), 使用有限元法。对于单元坐标 $r = r_i$ 到 $r = r_j$, 最小二乘法 (The Least-squares Method) 的变分式为

$$\delta \int_{r_i}^{r_j} \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dr} - \frac{\alpha}{r} + 2K \right)^2 dr = 0 \quad (18)$$

首先, 我们仍然设 α 为线性函数, 如公式(8)所示。形状函数也和公式(10)相同。将它们代入泛函式(18)中, 可以计算出如下的刚度矩阵和载荷列阵

$$[K]_e = \frac{1}{r_1 r_2 \ln(\frac{r_1}{r_2})} \begin{bmatrix} r_2^2 & -r_1 r_2 \\ sym & r_1^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\{P\}_e = 2K \begin{bmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

为了方案比较, 下面建立屈服条件公式(17)精确的刚度矩阵。这个解 $\alpha = d_1 r - 2K r \ln r$ 。现在, 希望建立两节点单元的模式, 设

$$\alpha(r) = d_1 r - d_2 r \ln r \quad (21)$$

按照上述的程序, 推导出精确的刚度矩阵和无荷列阵。这些公式和 α 为线性函数所推导出的公式(19)和(20)相同。塑性区的系统刚度方程式的形式为

$$\{K\}_G \{\alpha\}_G = \{P\}_G \quad (22)$$

既然刚度矩阵和载荷列阵是精确的, 所以, 计算出的节点应力函数 α 也将是精确的。但是, 在各节点之间, 任一点的 α 和应力的精确值只能利用公式(21)时, 才能确定。利用插值式(8)所产生的将是近似值。

4 实例说明

4.1 考虑园筒纯弹性变形。设一园筒内径 $r_i=80$ 单位长, 外径 $r_o=100$ 单位长, 离散为五个等长度单元, 受内压力 $P_i=1$ 单位压力, 外压力 $P_o=0$ 。线性的弹性单元和精确的弹性单元所计算的 α , σ_{rr} 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 数值分别列于表 1 和表 2 中。线性单元的 $\sigma_{\theta\theta}$ 数值是节点的平均值。可以看出: 线性单元计算的结果非常接近于精确单元所产生的。

表 1. 弹性分析—线性单元

节点 变量	1	2	3	4	5	6
α	-80.0000	-62.3074	-45.5765	-29.6819	-14.5189	0.0
σ_r	-1.000	-0.74175	-0.51791	-0.32262	-0.15123	0.0
$(\sigma_{\theta\theta})_{avg}$	4.44231	4.3029	4.0781	3.8822	3.7102	3.6297

表 2. 弹性分析—精确单元

节点 变量	1	2	3	4	5	6
α	-80.0000	-62.306	-45.5757	-29.6811	-14.5182	0.0
σ_r	-1.000	-0.74174	-0.51790	-0.32262	-0.15123	0.0
$\sigma_{\theta\theta}$	4.5555	4.2973	4.0734	3.8781	3.7067	3.5555

表 3. 塑性分析

节点变量	1	2	3	4	5	6
α	-35.7029	-29.2913	-22.4986	-15.3422	-7.8378	0.0
σ_r	-0.44628	-0.34870	-0.25566	-0.16676	-0.81643	0.0
$\sigma_{\theta\theta}$	1.55371	1.6512	1.7443	1.8332	1.9183	2.000
$(\sigma_{\theta\theta})_{avg}$	1.6029	1.6505	1.7436	1.8326	1.9177	1.9594

4.2 考虑园筒纯塑性变形。取材料的最大剪切应力极限值 $K=-1$ 单位应力。计算结果列于表 3 中。如前面所述, 塑性变形的线性和精确两种单元的刚度方程是相同的, 所以两种单元所获得的 α 和 σ_{rr} 数值相同而精确。应力分量 $\sigma_{\theta\theta}$ 可以从 $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - 2K$ 或从 dx/dr 计算出。对于精确单元, 两种方法产生相同的结果。然而, 对于线性单元从 $\sigma_{\theta\theta} = dx/dr$ 所得的数值是常数而近似的。 $(\sigma_{\theta\theta})_{avg}$ 表示线性单元节点应力 $\sigma_{\theta\theta}$ 的平均值。上述两种情况的计算结果用曲线表示在图 2 中。

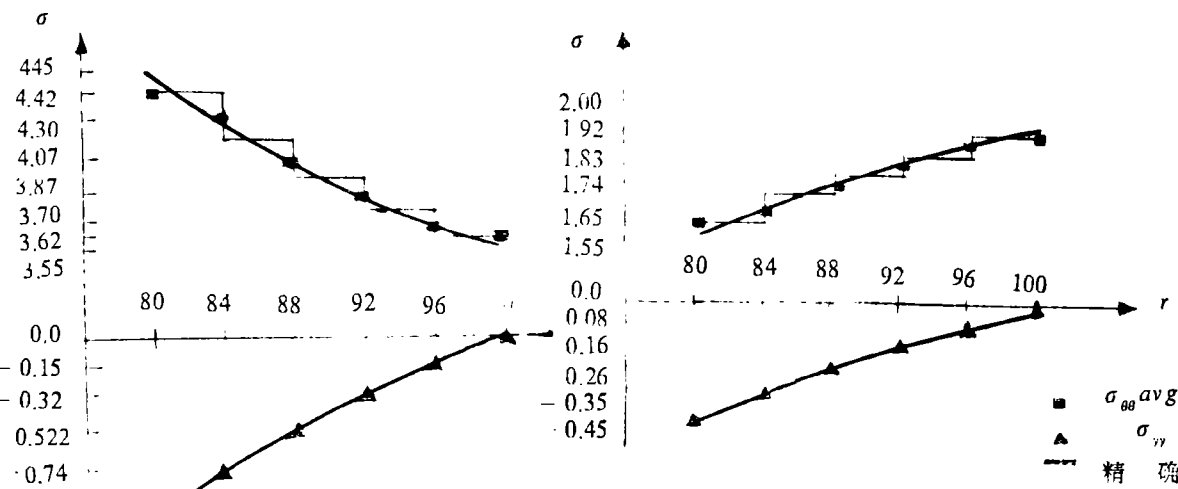


图 2 应力分布在(a)弹性圆筒

(b)全塑性圆筒

4.3 确定圆筒弹塑性交界面位置。在这种情况下，我们利用精确的弹性和塑性单元对同一圆筒进行弹塑性分析。由于采用精确单元，故只需用一个弹性和一个塑性单元。设 $K = -2.5$ 单位应力， $P_i = 1$ 单位压力， $P_o = 0$ 。首先，为了检查圆筒是全弹性或全塑性状态，起初采用一个非常小和一个非常大的单元。在检查弹性状态时，小单元是塑性单元并接近内表面，大单元是弹性单元。对于纯塑性状态，离散化相反，即小单元是弹性单元而接近外表面。根据每单元计算的应力数值检查是否符合屈服条件并改变单元交界点位置。经过少许次数迭代后，弹塑性区交界点——节点 2 的位置被找出（见表 4）。最终的应力分布清楚地表现在图 3 中。

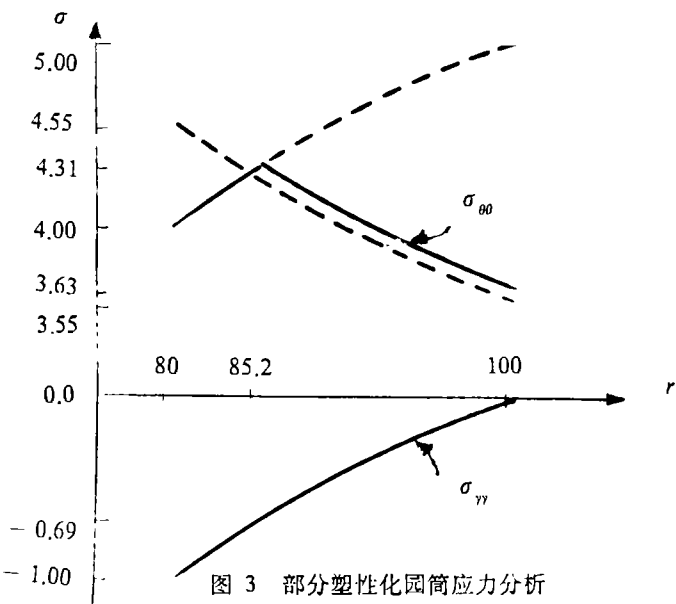


图 3 部分塑性化圆筒应力分析

表 4. 弹塑性分析

变 量	节 点		
	1	2	3
r	$0.8000000 \times 10^{+2}$	$0.8519287 \times 10^{+2}$	$0.1000000 \times 10^{+3}$
α	$-0.8000000 \times 10^{+2}$	$-0.5840349 \times 10^{+2}$	0.0
σ_{rr}	$-0.1000000 \times 10^{+1}$	$-0.6855444 \times 10^{+0}$	0.0
$\sigma_{\theta\theta}$	$0.4000000 \times 10^{+1}$	$0.4314461 \times 10^{+1}$	$0.3628916 \times 10^{+1}$

5 结 论

为了对厚壁园筒进行弹塑性分析，本文推导出线性和精确的有限元公式。通过利用这些公式确定出园筒受内压力作用下弹塑性区的交界面位置。大量实例表明：线性单元的计算结果非常接近于精确单元的计算结果。

参 考 文 献

1 Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. Theory of Elasticity. McGraw Hill, 1970
2 Johnson, W. and Mellor, P.B. Plasticity for Engineers. Van Nostrand, 1962.
3 刘鸿文. 材料力学. 高等教育出版社. 1983

Elastoplastic Analysis of Thick Cylinders By Using Finite Element Method

Yi Hengjie B. Tabarrok

(Zhengzhou Institue of Technology) (University of Toronto, Canada)

Abstract: For more efficient use of materials thick cylinders sometimes prestresed by an initial pressure. In this investigation four kinds of finite element formulas are developed for elastoplastic analysis of cylinders and an iterative scherne is described for finding the position of the interface. A number of examples are illustrated and a satisfactory convergence rate is demonstrated.

Keywords: Elastoplastic, initial pressure, Finite element method