第15卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.15 No.2
1994年 6 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Jun. 1994

中值定理"中间值"的渐近性*

王书彬 刘晓燕

(郑州工学院数理力学系)

摘 要: 本文是在文[3]的基础上给出了Taylor中值定理、第一积分中值定理"中间值"的源近性定理、并给出了第二积分中值定理三种形式的相应结论.

关键词: 中值定理,中间值,渐近性

中图分类号: O172

中值定理是数学分析乃至整个高等数学的重要定理，中值定理从诞生到现在的近300年间，对它的研究时有出现，自1982年，Jacobson B[1] 与 Azpeitia G[2] 分别给出了第一积分中值定理，Taylor 中值定理的中间值的渐近性的一些结果之后，关于中值定理"中间值"的渐近性问题引起了数学工作者的关注。比如文[4]，将中间值渐近性问题推广到柯西中值定理以及积分第一中值定理。在文[3]中对 Lagrange 中值定理，Canchy 中值定和第一积分中值定理的中值 ξ 的渐近性给出了较一般的结果。本文将作为文[3]的一个补充，讨论 Taylor 中值定理，第一积分中值定理，第二积分中值定理中间的渐近性公式，从而推广了文[1−6]的结果。

1 关于 Taylor 中值定理

定理 1: 假设函数 f (x)满足条件:

(i) $f^{(m+n)}(x)$ ($m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$)在点a的某邻域内存在，且在a处连续.

(ii) $f^{(n+1)}(a)=0$, $f^{(n+2)}(a)=0$, $f^{(n+m-1)}(a)=0$, $f^{(m+n)}(a)\neq 0$

则对带Lagrange型余项的Taylor公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^{n}$$

所确定的ξ(介于a与x之间)成立

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{m!n!}{(m+n)}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{1}$$

证明: 在给定的条件下，$f^{(n)}(\xi)$ 可展开成为 $m-1$ 阶 $Taylor$ 展开式，即:

$$f^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(a)+\frac{1}{m!}f^{(m+n)}(\xi)(\xi-a) \text{ (其中}\xi_1\text{介于}\xi\text{与}a\text{之间)}$$

* 收稿日期: 1993−05−06

从而: $f(x)=f(a)+\ +f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}$

$$+\frac{1}{n!}[f^{(n)}(a)+\frac{1}{m!}f^{(m+n)}(\xi_1)(\xi-a)^m](x-a)^n$$

另一方面由所给条件: $f(x)$ 可以展成为 $n+m-1$ 阶 Taylor 公式, 即:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(m+n)}(\xi_2)}{(m+n!)}(x-a)^{m+n}$$

其中ξ_2介于a与x之间。

由上述两式可得:

$$\frac{1}{m!n!}f^{(m+n)}(\xi_1)(\xi-a)^m(x-a)^n=\frac{f^{(m+n)}(\xi_2)}{(m+n)!}(x-a)^{m+n}$$

即: $(\frac{\xi-a}{x-a})^m=\frac{m!n!}{(m+n)!}\cdot\frac{f^{(m+n)}(\xi_2)}{f^{(m+n)}(\xi_1)}$

两边取极限$x\to a$, 并注意到当$x\to a$时, $\xi_1\to a$, $\xi_2\to a$, 即得:

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{m!n!}{(m+n)!}\right)^{\frac{1}{m}}$$

注: (1) 当 $m=1$ 时, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{n+1}$ 即文 [2] 中的结论.

(2)当$n=1$时, 即文[3]中关于$Lagrange$中值定理的结果.

2 关于积分第一中值定理

定理 2[7]: (积分第一中值定理) 若$f(t)$ 在 $[a,x]$ 上连续, $g(t)$ 在 $[a,x]$ 上可积, 且不变号, 则至少存在一点 $\xi\in(a,x)$ 使:

$$\int_a^x f(t)g(t)dt=f(\xi)\int_a^x g(t)dt$$

定理 3: 若 $f(t)\in C^{(n-1)}[a,x]$, $f^{(n-1)}(t)$ 在 a 处可微, 且 $f'(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$; $g(t)$ 在 $[a,x]$ 上可积且不变号, 而 $\lim\limits_{t\to a}g(t)/(t-a)^{\alpha}=l$ (l 为不等于零的有限数), 其中 $\alpha\geqslant 0$, ξ 由定理 2 所确定, 则

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{2+1}{n+1+1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

证明: 作辅助函数 $G(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)g(t)dt-f(a)\int_a^x g(x)dt}{(x-a)^{n+\alpha+1}}$

考察极限$\lim\limits_{x\to a}G(x)$

一方面，根据洛必达法则有：

$$\lim_{x\to a}G(x)=\lim_{x\to a}G(x)\frac{\int_a^x f(t)g(t)dt-f(a)\int_a^x g(x)dt}{(x-a)^{n+\alpha+1}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)}{(n+\alpha+1)(x-a)^{n+\alpha}}=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)}{(n+\alpha+1)(x-a)^{n+\alpha}}$$

利用$f(x)$在$x_0=a$点$n-1$阶的泰勒展开式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(a)(x-a)^{(n-2)}+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\eta)(x-a)^{(n-1)}$$

$$=f(a)+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\eta)(x-a)^{(n-1)}\quad(\eta\in a,x))$$

$$\therefore\quad\lim_{x\to a}G(x)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(\eta)}{(n-1)!}\cdot\frac{\eta-a}{x-a}\cdot\frac{1}{\eta-a}\cdot\frac{g(x)}{(x-a)^{\alpha}(n-\alpha+1)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(\eta)-f^{(n-1)}(a)}{(\eta-a)(n-1)!}\cdot\frac{\eta-a}{x-a}\cdot\frac{g(x)}{(x-a)^{\alpha}(n+\alpha+1)}$$

利用导数的定义：$f^{(n)}(a)=\dfrac{f^{(n-1)}(\eta)-f^{(n-1)}(\eta)}{\eta-a}$

利用前面定理1的注①得：

$$\lim_{x\to a}G(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(n+\alpha+1)(x-a)^{\alpha+1}}$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{1}{n+\alpha+1}\cdot L=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{L}{n+\alpha+1}$$

另一方面，由第一积分中值定理2有：

$$\lim_{x\to a}G(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(\xi)\int_a^x g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt}{(x-a)^{n+\alpha+1}}=\lim_{x\to a}\frac{(f(\xi)-f(a))\int_a^x g(t)dt}{(x-a)^{n+\alpha+1}}$$

同理，再利用$f(\xi)$在$\xi=a$点$n-1$阶的Taylor展开式可得：

$$f(\xi)=f(a)+\frac{1}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(\eta)(\xi-a)^{n-1},\ \eta\in(a,\xi)$$

$$\lim_{x\to a}G(x)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(\eta)\cdot(\xi-a)^{n-1}\int_a^x g(t)dt}{(n-1)!(x-a)^{n+\alpha+1}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(\eta)-f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!(\eta-a)}\cdot\frac{\eta-a}{\xi-a}\cdot\frac{\int_a^x g(t)dt}{(x-a)^{\alpha-1}}\cdot\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^n$$

$$=\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(\alpha+1)(x-a)^{\alpha}}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n}$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{L}{\alpha+1}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}G(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{L}{n+\alpha+1}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{L}{\alpha+1}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n}$$

即: $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n}=\frac{\alpha+1}{n+\alpha+1}$

故: $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)=\left(\frac{\alpha+1}{n+\alpha+1}\right)^{\frac{1}{n}}$、

证毕:

特例: (i) 当 $n=1$ $\alpha=0$ 时, 为文[1,4]的结果　(ii) 当 $n=1$, $\alpha\geqslant 0$ 时为文[5]结果

(ii) 当 $\alpha=0$, $n\geqslant 1$ 时, 为文[3]结果　(iV) 当 n、α 为正整数时, 为文[6]结果

现举例说明其应用

例 1: 已知积分 $\int_{\pi}^{x}(t^{2}-2\pi t)sin^{\frac{4}{3}}t|\cos t|dt$ $(\pi< x< 2\pi)$, 取 $f(t)=t^{2}-2\pi t$, $g(t)=\sin^{\frac{4}{3}}t|\cos t|$, 容易验知, $f(t)$ 与 $g(t)$ 在 $[\pi,x]$ $(\pi< x2\pi)$ 上满足定理 3 的条件, 这里 $\alpha=\frac{4}{3}$, $n=2)$, 于是由公式 (2) 有:

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-\pi}{x-\pi}=\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{2+\frac{4}{3}+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{1}{2}}$$

这里 ξ 满足 $\pi<\xi<2\pi$, 由定理2所确定.

3　关于积分第二中值定理

定理4[8,9]: 若 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上单调, $g(t)$ 在 $[a,x]$ 上可积, 则存在 $\xi\in(a,x)$, 使:

$$\int_{a}^{x}f(t)g(t)dt=f(a)\int_{a}^{\xi}g(t)dt+f(x)\int_{\xi}^{x}g(t)dt$$

定理 5: 若 $f(t)\in C^{(n)}[a,x]$, 在 $[a,x]$ 上单调, 且 $f^{(j)}(a)=0$, $(1\leqslant j\leqslant n-1)$, $f^{(n)}(a)\neq 0$, $g(t)$ 在 $[a,x]$ 上连续, 且 $\lim\limits_{t\to a}g(t)/(t-a)^{\alpha}=L$, ($L$ 为不等于零的有限数), 其中 $\alpha\geqslant 0$, ξ 由定理 4 确定, 则: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{n}{n+\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$

证明类似于定理3，作辅助函数：$G(x)=\dfrac{f(x)\int_a^x g(t)dt-\int_a^x f(t)g(t)dt}{(x-a)^{n+\alpha+1}}$

注：当 $n=1$ 时，即为文 [5] 中的定理 6，

例 2：已知积分 $\int_1^x (t^2-2t)(t-1)^3\ln t dt$，取 $f(t)=t^2-2t$，$g(t)=(t-1)^3\ln t$，易知 $f(t)$ 与 $g(t)$ 在 $[1,x]$ 上满足定理 4 的条件（这里 $\alpha=4$　$n=2$），于是，对于定理 4 所确定的 ξ，根据公式 (3) 有：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\xi-1}{x-1}=\left(\frac{2}{4+1+2}\right)^{\frac{1}{4+1}}=\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$$

4　关于Bonnet公式的一些结果

关于积分第二中值定理的另外两种形式，（即 Bonnet 公式），我们也可得到另外两个结果。

定理6[8]：(波内公式)

(1) 若 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上严格单调增加，非负、$g(t)$ 在 $[a,x]$ 上可积，则存在 $\xi\in(a,x)$、使 $\int_a^x f(t)g(t)dt=f(x)\int_\xi^x g(t)dt$.

(2). 若 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上严格单调减少，非负，$g(t)$ 在 $[a,x]$ 上可积，则存在 $\xi\in(a,x)$，使：$\int_a^x f(t)g(t)dt=f(a)\int_a^\xi g(t)dt$

对于定理 6 中的 (1)，当 $f(a)=0$ 时，是定理 5 的推论，即在定理 5 的条件下中值渐近公式为：

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)=\left(\frac{n}{n+\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

当 $f(a)\neq 0$ 时，上式不再成立，以如下例子说明：

例 3：对于积分 $\int_0^x (1+t)\cdot t dt$，这里 $f(t)=1+t$，$g(t)=t$，$f(t)$、$g(t)$ 都满足于定理 6（1）及定理 5 的条件，（这里 $\alpha=1$、$n=1$），而 $\int_0^x (1+t)\cdot t dt=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$，

$$f(x)\int_\xi^x g(t)dt=(1+x)\int_\xi^x t dt=(1+x)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

则波内公式(1)有：$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}=(1+x)(\frac{x^2}{2}-\frac{\xi^2}{2})$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}=\frac{\xi^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3(x+1)}=0$　　即　$\lim\limits_{x\to 0}=\frac{\xi}{x}=0\neq(\frac{1}{\alpha+2})^{\frac{1}{\alpha+1}}$

这说明文 [5] 中定理 8 是错误的。下面我们给出其中值渐近公式，即：

定理 7：若 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上严格单调增加，非负，在 $x=a$ 处连续且 $f(a)\neq 0$，$g(t)$ 在 $[a,x]$ 上可积，且 $\lim\limits_{t\to a}g(t)/(t-a)^{\alpha}=L$（$L$ 为非零有限数），其中 $\alpha\geqslant 0$，ξ 由定理 6(1) 所确定，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=0$。

证明：作辅助函数：$G(x)=\frac{\int_a^x f(t)g(t)dt}{(x-a)^{\alpha+1}}$

利用洛必达法则：　$\lim\limits_{x\to a}G(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)g(x)}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha+1}}=\frac{f(a)}{\alpha+1}\cdot L$

另一方面，利用波内公式(1).

$$\lim_{x\to a}G(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\int_{\xi}^{x}g(t)dt}{(x-a)^{\alpha+1}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\int_a^x g(t)dt-f(x)\int_a^{\xi}g(t)dt}{(x-a)^{\alpha+1}}$$

$$=\frac{f(a)\cdot L}{\alpha+1}-\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot\int_a^{\xi}g(t)dt}{(\xi-a)^{\alpha+1}}\cdot\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{\alpha+1}$$

$$=\frac{f(a)\cdot l}{\alpha+1}-\frac{f(a)\cdot l}{\alpha+1}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{\alpha+1}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}G(x)=\frac{f(a)}{\alpha+1}\cdot L=\frac{f(a)\cdot l}{\alpha+1}-\frac{f(a)\cdot l}{\alpha+1}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{\alpha+1}$$

即：$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)=0$

对于定理 6（2），文 [5] 定理 9 得到如下结果，即中值渐近公式为：$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)=0$，此结果是错误的。

例 4：考察积分 $\int_0^x(1-t)\cdot t\,dt$，这里 $f(t)=1-t$，$g(t)=t$，满足文 [5] 中定理 9 的条件：

$$\int_0^x(1-t)\cdot t\;dt=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{3}$$

$$f(0)\int_a^{\xi} g(t)dt = f(0)\int_a^{\xi} t\ dt = \frac{\xi^2}{2}$$

由波内公式(2)有: $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{\xi^2}{2}$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}(1-\frac{2x}{3}) = 1$, 即$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x} = 1 \neq 0$.

下面我们给出其中值渐近公式, 即:

定理 8: 若 $f(t)$ 在 $[a,x]$ 上严格单调减少, 非负, 且在 $x=a$ 处连续, $g\ (x)$ 在 $[a,x]$ 上可积, 且 $\lim\limits_{x\to a} g(t)/(t-a)^{\alpha} = l$ (l 为非零有限数), 其中 $\alpha \geqslant 0$, ξ 由定理 6(2) 所确定,

则: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi - a}{x-a} = 1$

证明类似于定理7, 作辅助函数 $G(x) = \frac{\int_a^x f(t)g(t)dt}{(x-a)^{\alpha+1}}$

即可.

参 考 文 献

1 B.Jacobson. On the mean valne theorem for integerals, American Mathe-matical Monthly,1982, Vol89, No.5: 300～301.

2 A.G.Azpeitia. On the Lagrange remainder of the Taylor formule, American Mathematical Monthly, 1982,Vol 89, No.5:311～312.

3 王书彬.关于微.积分中值定理的注记. 工科数学,1989,Vol.5, No.2-3:57～60.

4 李文荣.关于中值定理"中间值"的渐近性.数学实践与认识,1985,No.2:53～57.

5 刘希普.关于积分中值定理的注记.山东师大报,1991,Vol.6, No.4:104～106.

6 贾计荣、朱建明.关于积分中值定理"中间点"的进一步估计.淮北煤师院学报,1990,Vol.11, No.1:68～69.

7 林伟华.积分第一中值定理的改进. 数学通报, 1983,No.12:19～22.

8 赵显曾. 关于积分第二中值定理的一个注记.南京工学院学报,1988,Vol.5, No.5:47～51.

9 冈村博.积分の第二平均值定理に就に, 数学, 1947,No.1:33.

Asymptotic property of median for the mean value theorems

Wangshu Bin　　Lin Xiaoyan

(Zhengzhou Institute of Technology)

Aastract: This paper is a supplement of th epaper [3]. In this paper, asymptotic property of median for Taylor's mean value theorem and the first integral mean value theorem are considered, and we also give the correspondent result of three forms for the second integral mean value theorem.

Keywords: mean value theorem, meclian, asymptotic property