第15卷 第2期　　郑 州 工 学 院 学 报　　Vol.15 No.2
1994年 6 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Jun. 1994

F 集的 Fuzzy 贴近度及加权平均贴近度*

阎家杰

(郑州工学院)

摘　要: 本文推广了普通的F集的贴近度的概念，引进了F集的Fuzzy贴近度和加权平均贴近度以及λ水平贴近域等新概念，从而更加全面更加合理地描述了F集的贴近程度.

关键词: Fuzzy 贴近度，加权平均贴近度，λ水平贴近域
中图分类号: O159

F 集的贴近度在故障诊断、聚类分析、模型识别等方面均有重要应用。

普通的 F 集的贴近度的定义如下

定义 1　映射 σ: $F(X)\times F(X)\to[0,1]$叫做 $F(X)$上的一个贴近度,如果它满足以下三条件:

(1) $\forall \underset{\sim}{A}\in F(X)$有$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=1$;

(2) $\forall \underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in F(X)$有$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A})$;

(3) $\forall \underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}\in F(X)$，若$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}$，则$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$

称$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$为$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$的贴近度。

在大家所熟知的上述定义中，用满足定义中的三条公理的一个数去刻划两个 F 集的接近程度，显然有它的合理性，也有它的局限性。其合理性集中地体现在定义中的三条要求是大家公认的自然应该满足的三个条件；其局限性至少表现在以下两个方面:

第一，两个 F 集的贴近程度在论域的不同部分和不同点处一般是不一样的。如图 1，有时其差别是如此明显：在有些点处两个 F 集贴近得连一点误差都没有，如在图中的 x_2 点处；而在另一些点处两个 F 集的不贴近程度达到了极限，如在图中的 x_1 点处。用一个数显然不可能全面地刻划出两个 F 集贴近程度上的这些具体差异，而只能在总体上给两个 F 集的贴近程度一个粗略地描述，这常常不能满足实用上的需要。

* 收稿日期: 1993-12-12

第二，在实用上，对两个 F 集在论域的各个部分的贴近程度往往不是同等看待的。常常对两个 F 集在论域的某些地方或某几个点处的贴近程度特别关心，而在其余地方的贴近程度无关紧要，甚至不予考虑。显然，定义 1 中的三个条件不能保证体现这种要求。

下面将要引入的新的贴近度概念，既保留上述定义中的合理内核，又在某种程度上克服上述两个局限性。

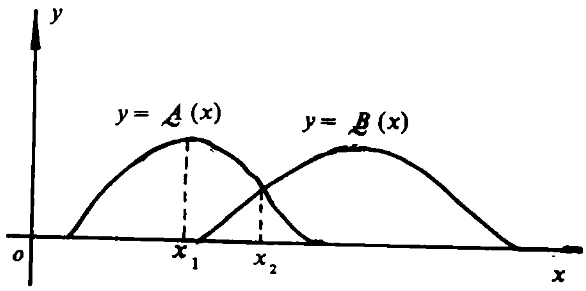

图1

定义 2　映射 σ: $F(X)\times F(X)\to F(X)$ 叫做 $F(X)$ 上的一个Fuzzy贴近度，如果 $\forall(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\in F(X)\times F(X)$，其象 $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\in F(X)$ 满足以下四条：

(1) $\forall x\in X$，当且仅当 $\underset{\sim}{A}(x)=\underset{\sim}{B}(x)$ 时，$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)=1$；

(2) $\forall x\in X$，当且仅当 $|\underset{\sim}{A}(x)-\underset{\sim}{B}(x)|=1$ 时，$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)=0$；

(3) $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A})$

(4) $\forall\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}\in F(X)$，当 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}$ 时，$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\subseteq\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\cap\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$

称 $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$ 为 F 集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的 *Fuzzy* 贴近度。

这种定义与传统的贴近度的定义的区别是明显的，定义 2 中的贴近度不再是一个数，而是一个新的 F 集，它在 x 点处的隶属函数值 $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)$ 是 F 集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 在 x 点处贴近程度的一种度量。

例如，$\forall x\in X,(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\in F(X)\times F(X)$，规定

(1) $\sigma_1(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)\overset{\Delta}{=}\cos(\frac{\pi}{2}|\underset{\sim}{A}(x)-\underset{\sim}{B}(x)|)$

(2) $\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)\overset{\Delta}{=}1-|\underset{\sim}{A}(x)-\underset{\sim}{B}(x)|$

(3) $\sigma_3(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)\overset{\Delta}{=}1-(\underset{\sim}{A}(x)-\underset{\sim}{B}(x))^2$

(4) $\sigma_4(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)\overset{\Delta}{=}\dfrac{(\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)}{\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)}$

易证上述映射 σ_i $(i=1,2,3,4)$ 均是 $F(X)$ 上的 Fuzzy 贴近度。

对于Fuzzy贴近度，显然有

$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})(x)\equiv 1 \quad (\forall x\in X)$

这从另一个侧面反应了上述 Fuzzy 贴近度的合理性。

Fuzzy 贴近度的隶属函数比较全面和具体地刻划了两个 F 集的贴近程度。假如想像普通贴近度那样，用一个数简明地描述两个 F 集的贴近程度，一个很自然的想法是求其 Fuzzy 贴近度的隶属函数的均值。

定义3 设 σ 是 $F(X)$ 上的 *Fuzzy* 贴近度，$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(X)$。当 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时，规定

$$\bar{\sigma}(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\overset{\Delta}{=}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x_i)$$

当 $X=[a,b]$ 时，规定

$$\bar{\sigma}(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\overset{\Delta}{=}\frac{1}{b-a}\int_a^b\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)dx$$

称 $\bar{\sigma}(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$ 为 F 集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的平均贴近度。

定义 3 中的平均贴近度显然是把论域 X 中各点平等看待的，如果实用上不能同等看待，可以引进加权平均贴近度的概念。

定义4 设 σ 为 $F(X)$ 上的Fuzzy贴近度，$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(X)$，当 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时，规定

$$\hat{\sigma}(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sum_{i=1}^{n}\omega(x_i)\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x_i)$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}\omega(x_i)=1$；当 $X=[a,b]$ 时，规定

$$\hat{\sigma}(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\int_a^b\omega(x)\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})(x)dx$$

其中 $\int_a^b\omega(x)dx=1$。称 $\hat{\sigma}(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$ 为 F 集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的加权平均贴近度。权函数 $\omega(x)$ 可根据实际问题的需要而选定。

在实用中，有时需要指明论域上的哪些点处能使两个 F 集的贴近程度不小于某一事

先指定的数，例如，在故障诊断中就常常遇到这一类问题．为此我们引入贴近域的概念。

定义 5　设 σ 为 $F(X)$ 上的 Fuzzy 贴近度，$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in F(X)$，则称

$$\sigma_\lambda(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) \overset{\Delta}{=} \{x | \sigma(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})(x) \geqslant \lambda\}$$

为 F 集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的 λ 水平贴近域。其中 $\lambda \in [0,1]$.

显然，$\sigma_\lambda(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) \in P(X)$.

参 考 文 献

1　汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海科技出版社，1983. 11.
2　阎家杰等. 模糊数学基础及应用初阶. 河南教育出版社，1993. 10.

Fuzzy Applicability and Weighted Average Applicability of F Sets

Yan Jiajie
(Zhengzhou Institute of Technlolgy)

Abstract: In this paper, the concept of generic applicability about F sets is generalized, and the new concepts of fuzzy applicability and weighted average applicability and applicable field about F sets are proposed.

Keywords: Fuzzy applicability, Weighted average applicability, λ level applicable field.