第15卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.15 No.1
1994年 3 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Mar. 1994

确定多因素权重分配的AHP方法

闫家杰

(郑州工学院)

摘 要: *在F多级综合评判中，如何合理地确定众多因素的权重分配，是一个关键，也是一个难题。本文提出用多元决策中的AHP方法确定多因素权重分配，从而给出了一个解决这一难题的比较科学、合理的方法。*

关键词: *F评判，权重分配，AHP方法。*

中图分类号: O 212

如何合理地确定各因素的权重分配，是应用F综合评判解决实际问题能否成功的关键之一。现在通常采用的方法是人们对各因素重要性的认识和经验，通过简单比较，直接给出各因素权重。在问题比较简单、因素较少的情形下，这样确定因素权重分配也可以保持大体上的合理性。但是，由于人们认识的多样性以及分析问题时的观点不同、侧重点不同和表达上的差异，使这种方法常常带有很大的主观随意性。特别是问题复杂、因素众多时，用这种方法确定权重分配就比较困难，甚至有可能自相矛盾。比如，可能出现甲比乙重要，乙比丙重要，而丙又比甲重要的判断结果。这显然是违反常识的，出现这种情况说明判断不具有一致性或偏离一致性过大。把在这种情况下得到的因素权重分配用于F综合评判将得出错误结果。

在问题复杂，因素众多的情况下，怎么样客观、合理地确定因素权重分配，是一个比较重要也比较困难的问题。本文试图用多元决策中的AHP方法确定多因素权重分配，这种方法简便、可靠、它不仅可以把人们对权重的判断定量化，而且可以对这种判断进行一致性检验，避免出现过大误差。从而使因素权重分配更加科学、合理。

用AHP确定多因素权重分配的步骤是:

第一，建立问题的递阶层次结构。就是把一个复杂问题分解成各个组成因素，把这些因素按照属性和支配关系分成若干组，形成不同层次。

例如，评价一个研究所的水平这也是一个受多种因素影响的比较复杂的问题，必须综合评判。设各有关因素形成如下的递阶层次结构。

收稿日期: 1993—11—16

A层　B层　C层　D层

- 研究所水平A_0
  - 基础条件B_1
    - 队伍状况C_1
    - 设备情况C_2
      - 主管部门拨款或企业资助经费D_1
      - 科研经费D_2
    - 经费情况C_3
  - 科研水平B_2
    - 论著C_4
      - 论著数D_3
      - 刊物或出版社级别D_4
      - 专家评价D_5
    - 成果C_5
      - 成果数D_6
      - 鉴定级别D_7
      - 获奖情况D_8

影响一个研究所水平的因素递阶层次结构

同一层次的因素对下一层次的某些因素起支配作用，同时它又受上一层因素的支配。这种支配关系形成了一个递阶层次。

第二，构造两两比较判断矩阵。对某一因素支配下的因素两两进行比较，用数值表明哪一个重要及重要程度。通常使用1—9比例标度:

1—9比例标度含义

标度	含　　义
1	表示两个因素相比，同样重要
3	表示两个因素相比，一个比另一个稍微重要
5	表示两个因素相比，一个比另一个明显重要
7	表示两个因素相比，一个比另一个强烈重要
9	表示两个因素相比，一个比另一个极端重要

2、4、6、8表示上述相邻判断的中值。

若因素i与j比较得a_{ij}，则j与i比较得$\frac{1}{a_{ij}}$。对n个因素来说，这样可得两两比较判断矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n}$$

它显然具有如下性质:

1) $a_{ij}>0$;　　2) $a_{ij}=1/a_{ij}$;　　3) $a_{ij}=1$

这种矩阵称为正的互反矩阵，A的元素一般不具有传递性，即未必成立等式

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$$

假如A的元素具有传递性，则称A为一致性矩阵。

约定: M层中有关因素对于支配它们的因素L的相对重要性判断矩阵记为L—M。

上例的两两比较判断矩阵如下

(1) A_0—B 阵

A_0	B_2	B_1
B_2	1	2
B_1	$\frac{1}{2}$	1

(2) B_1—C 阵

B_1	C_3	C_2	C_1
C_3	1	5	9
C_2	$\frac{1}{5}$	1	2
C_1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	1

(3) B_2—C 阵

B_2	C_4	C_5
C_4	1	2
C_5	$\frac{1}{2}$	1

(4) C_3—D 阵

C_3	D_1	D_2
D_1	1	2
D_2	$\frac{1}{2}$	1

(5) C_4—D 阵

C_4	D_5	D_4	D_3
D_5	1	1	3
D_4	1	1	3
D_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(6) C_5—D 阵

C_5	D_8	D_7	D_6
D_8	1	2	5
D_7	$\frac{1}{2}$	1	2
D_6	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

第三，计算同一层次中某些因素相对于支配它们的因素的重要性的权重分配，并进行一致性检验。

设$A=(a_{ij})_{nxn}$是在因素 L 支配下的 n 个因素的两两比较判断矩阵，解特征根问题

$$AW=\lambda_{max}W \tag{0.1}$$

可以证明，$\lambda_{\max}$存在且唯一；W 可由正分量组成，除了差一常倍数外也是唯一的。解出特征向量 W，归一化后的各分量就作为这 n 个因素相对于因素 L 的权重分配。

如果精度要求高，可以用幂法求特征向量，它可以达到任意精度，且可在计算机上实现。如果精度要求不高，可以用和法或根法求方程的近似解。

用根法解特征根方程的步骤如下:

1）把 A 的元素按行相乘并开 n 次方

2）将方根向量归一化作为特征向量 W

3）$\lambda_{max}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(AW)_i}{nW_i}$，其中$(AW)_i$和$W_i$分别表示（AW）和 W 的第 i 个分量。

为了保证判断不偏离一致性过大，在得到$\lambda_{\max}$后必须进行一致性检验:

①计算偏离一致性指示$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$

②从下表中查出随机一致性指标 RI

矩阵阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

③ 计算一致性比例$CR=\frac{CI}{RI}$

当 CR＜0.1 时，一般认为判断矩阵 A 的一致性可以接受。

当 CR＜0.1 时，一般认为判断矩阵 A 的一致性可以接受。

对上面的例子用根法计算结果如下

（1）当方程（0.1）中的矩阵$A = A_o - B$阵时，解得

$$W_2 = (0.33,\ 0.67)^T, \qquad AW_2 = (0.67,\ 1.33)^T$$

$$\lambda_{max} = 2, \quad CI_2 = 0, \quad RI_2 = 0, \quad CR_2 = 0 < 0.1$$

（2）当$A = B_1 - C$阵时，解得

$$W_3^1 = (0.08,\ 0.16,\ 0.76)^T, \qquad AW_3^1 = (0.24,\ 0.47,\ 2.28)^T$$

$$\lambda_{max} = 3, \quad CI_3^1 = 0, \quad RI_3^1 = 0.52, \quad CR_3^1 = 0 < 0.1$$

（3）当$A = B_2 - C$阵时，解得

$$W_3^2 = (0.67,\ 0.33)^T, \qquad AW_3^2 = (1.33,\ 0.67)^T$$

$$\lambda_{max} = 2, \quad CI_3^2 = RI_3^2 = CR_3^2 = 0 < 0.1$$

（4）当$A = C_3 - D$阵时，解得

$$W_4^3 = (0.67,\ 0.33)^T, \qquad AW_4^3 = (1.33,\ 0.67)^T$$

$$\lambda_{max} = 2, \quad CI_4^3 = RI_4^3 = CR_4^3 = 0$$

（5）当$A = C_4 - D$时，解得

$$W_4^4 = (0.14,\ 0.43,\ 0.43)^T, \qquad AW_4^4 = (0.43,\ 1.28,\ 1.28)^T$$

$$\lambda_{max} = 3.007, \quad CI_4^4 = 0.0035, \quad RI_4^4 = 0.52, \quad CR_4^4 = 0.0067 < 0.1$$

（6）当$A = C_5 - D$时，解得

$$W_4^5 = (0.14,\ 0.27,\ 0.59)^T, \qquad AW_4^5 = (1.83,\ 0.84,\ 0.39)^T$$

$$\lambda_{max} = 3.004, \quad CI_4^5 = 0.02, \quad RI_4^5 = 0.52, \quad CR_4^5 = 0.0038 < 0.1$$

可见，各层因素相对于其支配因素的权重分配均具有可以接受的一致性。否则，对判断矩阵要进行修正。

最后，计算所有因素对总目标的权重分配，并进行一致性检验。

设第（K−1）层因素相对于总目标的权重分配为

$a_1^{k-1} = (a_1^{k-1},\ a_2^{k-1},\ \cdots,\ a_m^{k-1})^T$，第 K 层在第 K−1 层第 j 个因素支配下的因素权重分配为

$$b_j^k = (b_{1j}^k,\ b_{2j}^k,\ \cdots,\ b_{nj}^k)^T$$

（不受支配的因素的权重为零）。令

$$B^k = (b_1^k,\ b_2^k, \cdots,\ b_m^k)$$

则第K层n个因素相对于总目标的权重分配为

$$a^k = B^k a^{k-1} \tag{0.2}$$

在上例中，$a^2=(0.33,\ 0.67)^T$

$$b_1^3=(b_{11}^3,\ b_{21}^3,\ \cdots,\ b_{51}^3)=(0.08,\ 0.16,\ 0.76,\ 0,\ 0)^T$$

$$b_2^3=(b_{12}^3,\ b_{22}^3,\ \cdots,\ b_{52}^3)=(0,\ 0,\ 0,\ 0.67,\ 0.33)^T$$

$$B^3=(b_1^3,\ b_2^3)=\begin{bmatrix}0.08 & 0.16 & 0.76 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.67 & 0.33\end{bmatrix}^T$$

由（0.2）式有

$$a^3=B^3a^2=(0.026,\ 0.053,\ 0.25,\ 0.45,\ 0.22)^T$$

同样方法可得

$$B^4=\begin{bmatrix}0.67 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.14 & 0.43 & 0.43 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0.27 & 0.59\end{bmatrix}^T$$

由（0.2）式有

$$a^4=B^4a^3=(0.17,\ 0.083,\ 0.063,\ 0.19,\ 0.19,\ 0.03,\ 0.059,\ 0.13)^T$$

最后得到10个因素 C_1，C_2，D_1，D_2，D_3，D_4，D_5，D_6，D_7，D_8 相对于总目标的权重分配为

$$(0.026,\ 0.053,\ 0.17,\ 0.83,\ 0.063,\ 0.19,\ 0.19,\ 0.03,\ 0.059,\ 0.13)^T$$

若第（$K-1$）层的三个一致性指标为CI_{k-1}，RI_{k-1}，CR_{k-1}，则第K层相应指标为

$$CI_k=(CI_k^1,\ \cdots,\ CI_k^m)a^{k-1} \tag{0.3}$$

$$RI_k=(RI_k^1,\ \cdots,\ RI_k^m)a^{k-1} \tag{0.4}$$

$$CR_k=CR_{k-1}+CI_k/RI_k \tag{0.5}$$

其中 CI_k^i 和 RI_k^i 分别为在（$K-1$）层第 i 个因素支配下的判断矩阵的偏离一致性指标和平均随机一致性指标。当 $CR_k<0.1$ 时一般认为在 K 层水平上各因素相对于总目标的权重分配具有可以接受的一致性。

在上例中，$CR_2=0$

$$CI_3=(0,\ 0)\begin{pmatrix}0.33\\0.67\end{pmatrix}=0,\quad RI_3=(0.52,\ 0)\begin{pmatrix}0.33\\0.67\end{pmatrix}=0.17$$

$$CR_3=0+\frac{0}{0.17}=0<0.1$$

$$CI_4=(0,\ 0,\ 0,\ 0.0035,\ 0.02)(0.026,\ 0.053,\ 0.25,\ 0.45,\ 0.22)^T=0.0059$$

$$RI_4=(0,\ 0,\ 0,\ 0.52,\ 0.52)(0.026,\ 0.053,\ 0.25,\ 0.45,\ 0,\ 22)^T=0.348$$

$$CR_4=0+\frac{0.0059}{0.348}=0.017<0.1$$

因此，所有因素相对于总目标的权重分配有令人满意的一致性。

参 考 文 献

1 闫家杰, 赵万忠, 迟风起编著. 模糊数学基础及应用初阶. 河南教育出版社. 1993
2 许树柏著. 层次分析法原理. 天津大学出版社. 1988

Determination of Multi-factor Weight by AHP method

Yan Jiajie
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This paper discusses the determination of the Multi-factor Weight by using the Analytical Hierarchy Process method.

Keywords: Fuzzy multivariate decision, Weight vector, AHP method