第14卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.14 No.3
1993年 9月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1993

关于广义逆矩阵 A^- 的两个计算公式*

侯双印 李梦如

（郑州工学院） （郑州大学）

提 要: 本文给出了广义逆矩阵 A^- 的两个计算公式。

关键词: 非奇异矩阵; 分块矩阵; 广义逆矩阵。

中图分类号: O151.21

1 予备知识

定义 设 $A\in C^{m\times n}$，如果存在 $G\in C^{n\times m}$ 满足 penrose-Moore 方程

①$AGA=A$

②$GAG=G$

③ $(GA)^H=GA$

④ $(AG)^H=AG$

的全部或一部分，则称 G 为 A 的广义逆矩阵。

满足方程 $AGA=A$ 的一切广义逆矩阵记作 $A\{1\}$，$A\{1\}$中任意一个固定的广义逆矩阵记作 A^-。

定理 对任意的 $y\in c^{n\times m}$ 有①$A^-+y-A^-AyAA^-\in A\{1\}$;

②$A\{1\}$中任何一个矩阵都可以表示成①中左端的形式。

此定理的证明见[1]。

引理一 设 $A\in C^{m\times n}$，P，Q 依次分别为 $m\times m$，$n\times n$ 的非奇异复矩阵，则

$$Q(PAQ)^-P\in A\{1\}$$

证明: $\because$ $(PAQ)(PAQ)^-(PAQ)=PAQ$

$$\therefore P^{-1}(PAQ)(PAQ)^-(PAQ)Q^{-1}=A$$

即 $AQ(PAQ)^-PA=A$

从而知 $Q(PAQ)^-P\in A\{1\}$

引理二 设 $A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (r) \\ (m-r) \end{array} \\ \begin{array}{cc} (n-r) & (r) \end{array} & \end{array}$，则

* 收稿日期: 1992-06-21

$$\begin{pmatrix} X_{11} & A_{21}^{-} \\ A_{12}^{-} & X_{22} \end{pmatrix} \in A\{1\}$$

其中: X_{11} 满足 $A_{21}X_{11}A_{12}=0$; X_{22} 满足 $A_{12}X_{22}A_{21}=0$。

证明: $\because A\begin{pmatrix} X_{11} & A_{21}^{-} \\ A_{12}^{-} & X_{22} \end{pmatrix} A$

$$=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & A_{21}^{-} \\ A_{12}^{-} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{12}A_{12}^{-} & A_{12}X_{22} \\ A_{21}X_{11} & A_{21}A_{21}^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{12}X_{22}A_{21} & A_{12}A_{12}^{-}A_{12} \\ A_{21}A_{21}^{-}A_{21} & A_{21}X_{11}A_{12} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} X_{11} & A_{21}^{-} \\ A_{12}^{-} & X_{22} \end{pmatrix} \in A\{1\}$$

引理三 $(A^{-})^{T}=(A^{T})^{-}$

2 关于广义逆矩阵A^{-}的两个计算公式

公式一 设 $A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (r) \\ (m-r) \end{array} \\ \begin{array}{cc} (n-r) & (r) \end{array} & \end{array}$ 如果 $det(A_{12})\neq 0$

则

$$A^{-}=\begin{pmatrix} X_{22} & 0 \\ A_{12}^{-1}-X_{11}A_{22}A_{12}^{-1}-A_{12}^{-1}A_{11}X_{22} & X_{11} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} -E_{n-r} \\ A_{12}^{-1}A_{11} \end{pmatrix} B^{-}\begin{pmatrix} A_{22}A_{12}^{-1} & -E_{m-r} \end{pmatrix}$$

其中: $B=A_{21}-A_{22}A_{12}^{-1}A_{11}$

X_{11} 满足 $X_{11}B=0$

X_{22} 满足 $BX_{22}=0$

证明：

$$\because\begin{pmatrix} -A_{22}A_{12}^{-1} & E_{m-r} \\ E_r & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_{n-r} \\ E_r & -A_{12}^{-1}A_{11} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -A_{22}A_{12}^{-1}A_{11}+A_{21} & 0 \\ A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_{n-r} \\ E_r & -A_{12}^{-1}A_{11} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & A_{21}-A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

记　$B=A_{21}-A_{22}A_{12}^{-1}A_{11}$

$$P=\begin{pmatrix} -A_{22}A_{12}^{-1} & E_{m-r} \\ E_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & E_{n-r} \\ E_r & -A_{12}^{-1}A_{11} \end{pmatrix}$$

则由 $det(P)=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ 及 $det(Q)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 知

$$Q(PAQ)^{-}P\in A\{1\} \qquad \text{(引理一)}$$

又由　$PAQ=\begin{pmatrix} 0 & B \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}$ 知

$$\begin{pmatrix} X_{11} & A_{12}^{-1} \\ B^{-} & X_{22} \end{pmatrix}\in A\{1\} \qquad \text{(引理二)}$$

其中：X_{11} 满足 $A_{12}X_{11}B=0$ 即 $X_{11}B=0$

X_{22} 满足 $BX_{22}A_{12}=0$ 即 $BX_{22}=0$

故　$A^{-}=Q(PAQ)^{-}P$

$$=Q\begin{pmatrix} 0 & B \\ A_{12} & 0 \end{pmatrix}^{-}P=Q\begin{pmatrix} X_{11} & A_{12}^{-1} \\ B^{-} & X_{22} \end{pmatrix}P$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & E_{n-r} \\ E_r & -A_{12}^{-1}A_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & A_{12}^{-1} \\ B^{-} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A_{22}A_{12}^{-1} & E_{m-r} \\ E_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & E_{n-r} \\ E_r & -A_{12}^{-1}A_{11} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} X_{11} & A_{12}^{-1} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^{-} & 0 \end{pmatrix}\right]\cdot$$

$$\begin{pmatrix} -A_{22}A_{12}^{-1} & E_{m-r} \\ E_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & X_{22} \\ X_{11} & A_{12}^{-1}-A_{12}^{-1}A_{11}X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A_{22}A_{12}^{-1} & E_{m-r} \\ E_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} B^- & 0 \\ -A_{12}^{-1}A_{11}B^- & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A_{22}A_{12}^{-1} & E_{m-r} \\ E_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} X_{22} & 0 \\ A_{12}^{-1}-X_{11}A_{22}A_{12}^{-1}-A_{12}^{-1}A_{11}X_{22} & X_{11} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} -E_{n-r} \\ A_{12}^{-1}A_{11} \end{pmatrix} B^-\ (A_{22}A_{12}^{-1} \quad -E_{m-r})$$

公式二 设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\in C^{m\times n}$，如果$det(A_{21})\neq 0$

则

$$A^-=\begin{pmatrix} X_{22} & A_{21}^{-1}-A_{21}^{-1}A_{22}X_{11}-X_{22}A_{11}A_{21}^{-1} \\ 0 & X_{11} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} A_{21}^{-1}A_{22} \\ -E_{n-r} \end{pmatrix} B_1^-\ (-E_{m-r} \quad A_{11}A_{21}^{-1})$$

其中：$B_1=A_{12}-A_{11}A_{12}^{-1}A_{22}$

X_{11} 满足 $B_1X_{11}=0$

X_{22} 满足 $X_{22}B_1=0$

公式二可用两种方法证明：其一由公式一及引理三证明；另一采用与公式一证明类似的方法证明。但前者证法简单，下面仅给出这个简单证明。

由 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 得 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$

又 $det(A_{21}^T)=det(A_{21})\neq 0$

故由引理三及公式一得

$$(A^-)^T=(A^T)^-)=\begin{pmatrix} X_{22}^T & 0 \\ (A_{21}^{-1})^T-X_{11}^TA_{22}^T(A_{21}^{-1})^T-(A_{21}^{-1})^TA_{11}^TX_{22}^T & X_{11}^T \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} -E_{m-r} \\ (A_{21}^{-1})^TA_{11}^T \end{pmatrix} D^-(A_{22}^T(A_{21}^{-1})^T \quad -E_{n-r})$$

其中：$D=A_{12}^T-A_{22}^T(A_{21}^{-1})^TA_{11}^T=B_1^T$

X_{11} 满足 $X_{11}^TD=0$ 即 $B_1X_{11}=0$

X_{22} 满足 $DX_{22}^{T}=0$ 即 $X_{22}B_{1}=0$

$$\therefore\quad A^{-}=\begin{pmatrix} X_{22} & A_{21}^{-1}-A_{21}^{-1}A_{22}X_{11}-X_{22}A_{11}A_{21}^{-1} \\ 0 & X_{11} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} A_{21}^{-1}A_{22} \\ -E_{n-r} \end{pmatrix} B_{1}^{-}\left(-E_{m-r} \quad A_{11}A_{21}^{-1}\right)$$

计算出 A^{-} 后，再由“1”中的定理就可得出 $A\{1\}$ 中的任何一个矩阵。

参 考 文 献

[1] 丁学仁，蔡高厅编．工程中的矩阵理论　天津大学出版社　1985 年 9 月第一版．

[2] 侯双印　关于关于 A⁺的两个性质的简明证法及其定理，郑州工学院学报　1991 年第四期

Two Computation formulas on generalized inverse matrix A^{-}

Hou Shuang yin　　Li Mengru

(ZhengZhou institute of Technology)　　(Zheng Zhou University)

Abstract　in this paper, Two computation formulas on generalized inverse matrix A^{-} are given.

Keywords: Non-singular matrix, Block matrix, Generalized inverse matrix.