

一种从时间序列计算高阶系统 正的李雅普诺夫指数的新算法*

杨育霞 高金峰 王俊鹏

(郑州工学院计算机系)

摘 要: 本文提出了一个利用从实际物理系统得到的时间序列计算正的李雅普诺夫指数的新算法, 并对一个具有非线性负电容的四阶自治电路进行了实际测试和计算。此算法给人们提供了一种直接判断实际动态系统中, 是否发生混沌或超混沌运动的方法。

关键词: 李雅普诺夫指数、重构吸引子、混沌、超混沌

中图分类号: TM13

要想判别一个四阶以上的高阶物理系统在一定的参数下处于什么运动状态, 目前最有效的方法是计算它的李雅普诺夫指数。而传统的指数计算方法是对从抽象的电路模型得到的状态方程确定的相空间来进行的。本文提出的算法, 是直接对一个实际物理系统进行测试得到的时间序列进行吸引子重构, 在重构的相空间进行计算的。

所谓“时间序列”, 就是在相等的时间间隔下, 对系统的输出进行采样所得到的一组值的序列。由这样一个时间序列, 利用吸引子重构技术, 可从重构的吸引子中, 获得系统输出的长期定性特征, 特别是李雅普诺夫指数, 从而达到判断系统输出信号性质的目的。

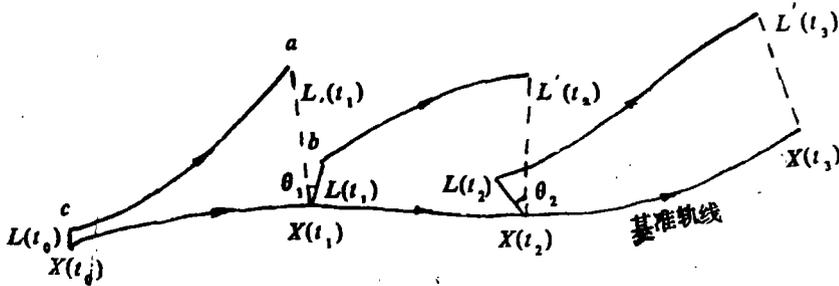
1 正的李雅普诺夫指数的计算法

新算法的基本思想是: 在重构的相空间吸引子上, 检验轨道在尽可能小的长度(面积)尺度范围的发散程度。计算一个正的李雅普诺夫指数 λ_1 可以判断系统是否发生混沌运动, 进一步计算 $\lambda_1 + \lambda_2$, 可以判断四阶以上动态系统中是否发生超混沌运动。需要说明的是, 该算法是在假定系统具有至少一个正的李雅普诺夫指数前提下提出的。

1.1 计算 λ_1 的固定进化时间算法

给出一个时间序列, 利用坐标延迟, 可以重构一个 m 阶吸引子 (m 一般取等于系统的阶数), 即重构吸引子的点由 $\{x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)\}$ 给出。其中 τ 是延迟时间。

* 收稿日期: 1992-04-10

图1 计算 λ_1 的轨线进化和替换过程

设初始点为 $\{X(t_0) = \{x(t_0), x(t_0 + \tau), \dots, x(t_0 + (m-1)\tau)\}$, 选择从 $X(t_0)$ 点出发的轨线为基准轨线, 如图 1 所示。首先观察从离 $X(t_0)$ 点最近的 C 点出发的相邻轨线与基准轨线之间的离散程度。 $X(t_0)$ 点与 C 点之间的距离长度为 $L(t_0)$, 经过一个进化时间 Δt 后, 基准轨线进化到 $X(t_1)$ 点, 相邻轨线进化到 a 点。两轨线之间离散程度由 a 点到 $X(t_1)$ 点的距离长度 $L'(t_1)$ (一般为 $L'(t_k)$) 与初始距离长度 $L(t_0)$ (一般为 $L'(t_{k-1})$) 之比来表征。在进入下一步进化之前, 先进行归一化处理, 即在与原相轨线相同的方向上, 由紧靠基准点 $X(t_1)$ 的 b 点代替原来的 a 点, 这就是所谓的替换过程。新替换点 b 应满足两个条件: (1) 它离基准轨线上的 $X(t_1)$ 点之间的距离 $L(t_1)$ (一般为 $L(t_k)$) 应比 $L'(t_1)$ 小, 且在所限定的范围内达到最小; (2) a 点到 $X(t_1)$ 点的方向与 b 点到 $X(t_1)$ 点的方向之间的夹角 θ_1 应小于所规定的范围。每进行一步进化和替换, 利用下式 [1] 计算 λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \left[\log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \right] \quad (1)$$

此过程反复进行下去, 直到基准轨线全部进化完或指数 λ_1 收敛。(1) 式中, M 是进化的步数。在此算法中, 进化时间 $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 保持定值。程序框图见图 2。

1.2 计算 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的固定进化时间算法

文献 [1] 给出一个变进化时间的算法, 但选择进化时间及替换点的工作很复杂。而我们提出的新算法, 是在计算 λ_1 的基础上, 提出的固定进化时间算法。从而避免了烦琐地进化时间的选择过程。

此算法的计算过程如图 3 所示。首先, 在重构的相空间吸引子上选择点 $a(t_0) = \{x(t_0), x(t_0 + \tau), \dots, x(t_0 + (m-1)\tau)\}$, 并把从 $a(t_0)$ 点出发的轨线作为基准轨线。在点 $a(t_0)$ 附近选择一对点 $b(t_0)$ 、 $c(t_0)$ 分别以它们为出发点形成另两条进化的轨线。

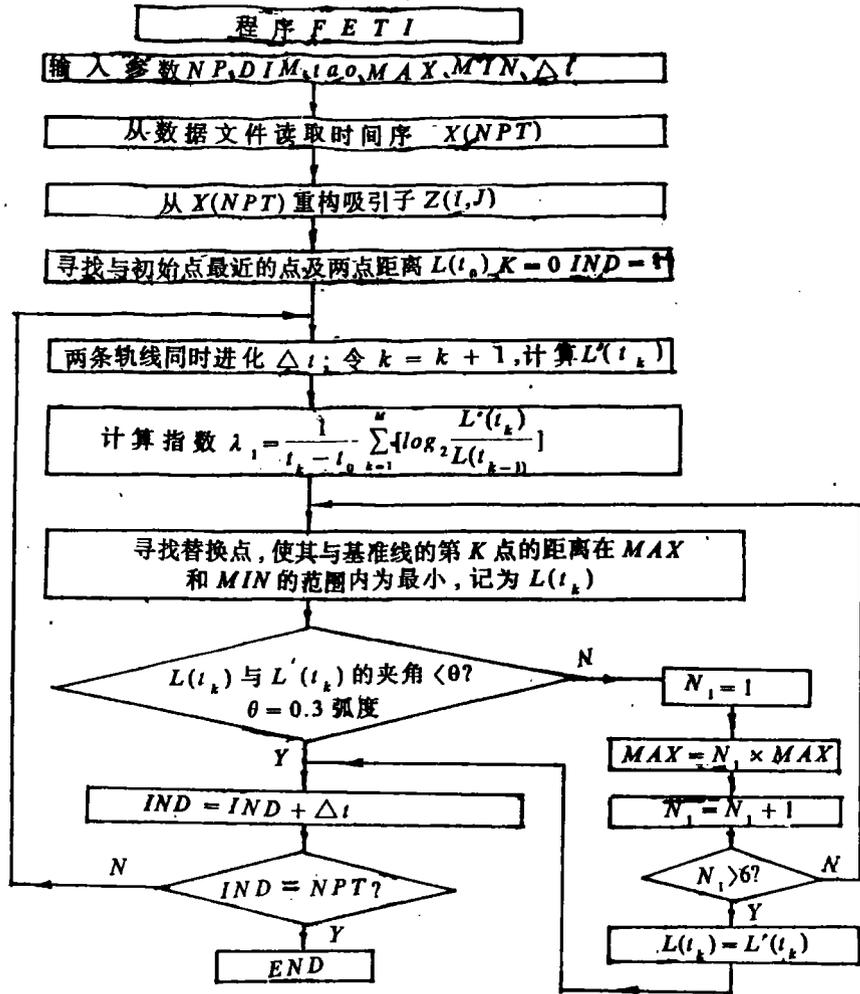


图2 计算 λ_1 的程序框图

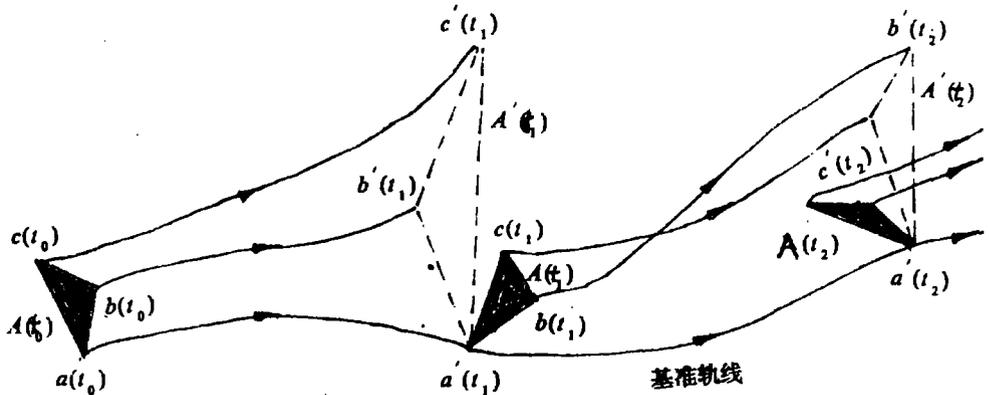


图3 计算 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的轨线进化和替换过程

经过一个进化时间 Δt 后, 最初三个点 $a(t_0)$ 、 $b(t_0)$ 、 $c(t_0)$ 分别沿着各自的进化轨线到

达 $a'(t_1)$ 、 $b'(t_1)$ 、 $c'(t_1)$ 。分别计算以点 $a(t_0)$ 、 $b(t_0)$ 、 $c(t_0)$ 为顶点所构成的三角形的面积 $A(t_0)$ 和以点 $a'(t_1)$ 、 $b'(t_1)$ 、 $c'(t_1)$ 为顶点所构成的三角形的面积 $A'(t_1)$ 。显然, $A'(t_1)$ 与 $A(t_0)$ 的比值表征了以 $a(t_0)$ 、 $b(t_0)$ 、 $c(t_0)$ 为出发点的三条轨线在进化 Δt 时间内的分离程度。在进入下一步进化之前, 先进行替换, 即在基准轨线的 $a'(t_1)$ 点附近选择两点 $b(t_1)$ 和 $c(t_1)$, 选取原则同 1.1 节所述, 且两点不能重合。以 $a'(t_1)$ 、 $b'(t_1)$ 、 $c'(t_1)$ 为顶点所构成的面积为 $A(t_1)$ 。然后分别以这三点作为三条轨线的新起点进行下一步进化过程。每走一步这样的替换和进化, 可利用下式 [1] 计算 $\lambda_1 + \lambda_2$:

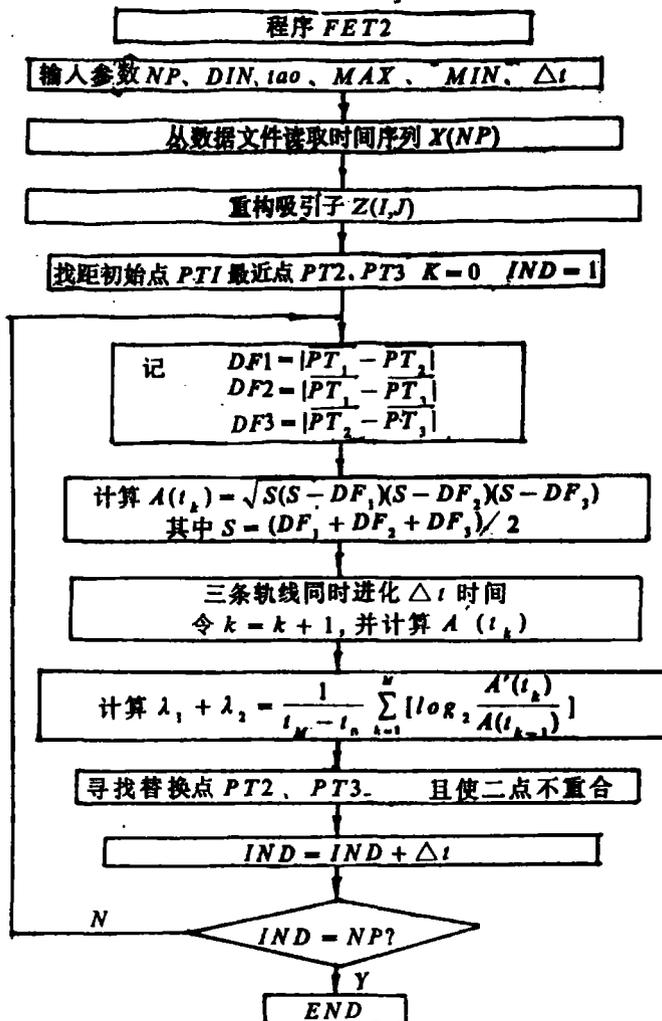


图4 计算 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的程序框图

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \left[\log_2 \frac{A'(t_k)}{A(t_{k-1})} \right] \quad (2)$$

此过程反复进行下去, 直到基准轨线全部进化完或指数 $\lambda_1 + \lambda_2$ 收敛。式 (2)

中 $A'(t_k)$ 为由点 $a'(t_k)$ 、 $b'(t_k)$ 、 $c'(t_k)$ 为顶点所构成的三角形的面积； $A(t_{k-1})$ 为由点 $a(t_{k-1})$ 、 $b(t_{k-1})$ 、 $c(t_{k-1})$ 为顶点所构成的三角形的面积。在此算法中，进化时间 $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 保持定值。程序框图见图 4。

2 计算结果

用上述的算法，对文献 [3] 提出的四阶自治电路，即图 5 所示具有非线性负电容的四阶自治电路进行测试计算。图 5 (a) 中，子电路 N_1 对应于一个负电阻， N_2 对应于图 5(b) 所示的分段线性荷控电容，电路中的固定参数如图中所标示， R 作为分岔参数。当 $R = 60\Omega$ 时，由文献 [2] 所提供的混沌信号采集和处理系统测取 u_{c1} 得到一个时间序列。采样时间间隔为 10^{-4} 秒，数据个数 $NP = 16000$ 。

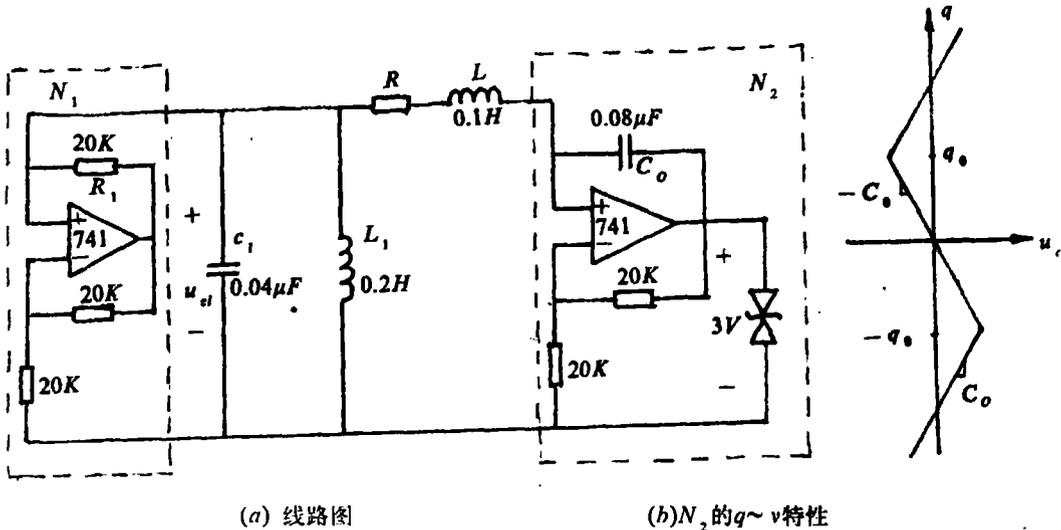


图5 具有非线性负电容的四阶自治电路的实验线路图

为计算 λ_1 和 λ_2 ，必须慎重考虑重构吸引子的延迟时间 τ 和进化时间 Δt 。

由于各种物理系统的混沌运动错综复杂，各有特点，所以对于 τ 的选择没有一个统一固定规则。对图 5 的电路，经过反复比较得知，当 $\tau < 3.6 \times 10^{-5}$ 秒时，重构吸引子局限在细长的对角线位置，当 $\tau > 1.2 \times 10^{-4}$ 秒时，原吸引子的拓扑结构消失，只有当 τ 在 $5 \times 10^{-5} \sim 1.2 \times 10^{-4}$ 秒范围内时，重构吸引子保留了原吸引子的几何结构和拓扑特征。图 6 (a) 是原始吸引子，图 6 (b) ~ (c) 是 τ 取不同值时的几个重构吸引子。所以，对图 5 的电路，我们取 $\tau = 10^{-4}$ 秒作为重构吸引子的延迟时间。

进化时间 Δt 的大小，直接关系到计算过程的替换次数。如果替换次数太多，将会导致严重丧失相空间取向。如果替换次数太少，将使相邻轨线之间离散程度严重或出现折叠，从而失去必要的信息。所以， Δt 若选择得当，可以使相邻轨线的发散程度控制在一定范围内，同时也可尽量避免折叠现象的发生。对图 5 的电路，经过反复筛选，我们

取 $\Delta t = 6 \times 10^{-4}$ 秒作为进化时间。

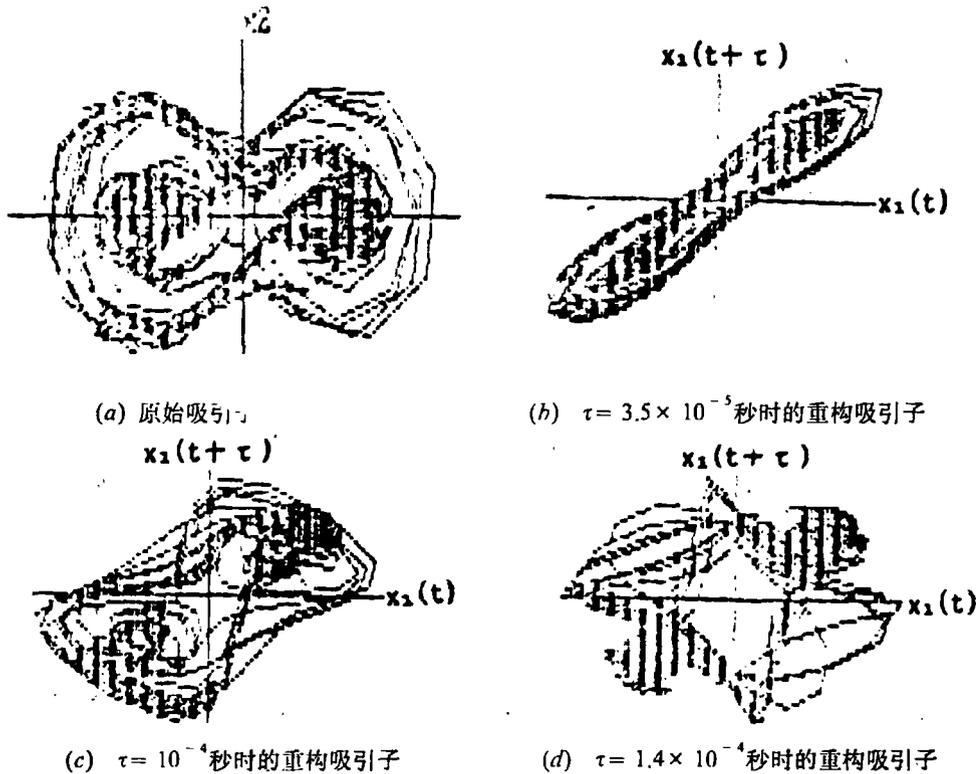


图6 重构吸引子延迟时间 τ 的选择

对于测试得到的时间序列，利用上述算法和选择的参数，经过计算，得到： $\lambda_1 \approx 0.042$ ， $\lambda_2 \approx 0.018$ 。由于计算得到了两个正的李雅普诺夫指数，故可判断出此电路在分岔参数 $R = 60\Omega$ 时出现了超混沌振荡。这和文献 [3] 中用传统的指数计算方法得到的结果在定性上是一致的。

总之，从一个时间序列计算高阶系统正的李雅普诺夫指数的新算法，给人们提供了一种直接判断实际动态系统的动态特性的方法。而且，由于此算法中的进化时间是固定的，从而使计算过程更简便实用。

参 考 文 献

- (1) Alan Wolf. Determining Lyapunov Exponents from a time Series. Physica 16D (1985) pp285~317.
- (2) 高金峰、王俊、杨育霞. 混沌信号采集和处理系统的设计及应用. 《河南科技》, 1991.9. pp21~22
- (3) 杨育霞、王俊、高金峰. 一个非线性四阶自治电路中的超混沌振荡. 《郑州工学院学报》, 1991.1. pp 77~86.

(下转90页)

参 考 文 献

[1]何立民, 单片机应用系统设计, 北京航空航天大学出版社 1990 年

The Application of single chip Computer to Eccentric Eccentric Adlmeasuring Apparatus

Wang Yizhen Zhao Haigen

(luo yang staff and workers Institute of science and Technology)

Abstract The paper deals with the application of 8301 Single chip computer to the eccentric ad-measuring apparatus used for the measurement of welding electrodes. In this paper the Control program of the single chip computer is accounted for in details Besides a detailed list of some presented in this paper.

keywords Single chip computer, eccentric admeasurement, welding electrode,

(上接 74 页)

A New Method for Computing the Positive Lyapunov Exponent of Thehigh Order System from Time Series

Yangyuxia GaoJinjing WangJunkun

(Zhengzhou Institute of Techmology)

Abstract: In this paper, a novel method of computing positive lyapunov exponents from a time series was presented. Using the method, we had computed the output of a fourth order autonomous circuit which contains a pice-wise linear negative capacitance. the results show how the method given can be used to determine the behavior of the dynamic system.

Keywords: Lyapunov exponent, Attractor reconstruction chaos, super chaos.