

# 考虑齿侧间隙的齿轮传动 啮合角的计算\*

曹廷驹

刘亦文

(华北水利水电学院)

**摘要:** 本文分析了圆柱直齿轮、圆柱斜齿轮及蜗杆传动的齿侧间隙及变位系数与传动啮合角及中心距变化量之间的关系, 推导出了这些参数值之间的数值关系式(广义啮合方程式), 从而为研究相关的公差规范及调整齿侧间隙提供了理论依据。本文提出的公式简单明了, 便于在实际工作中掌握和使用。

**关键词:** 齿侧间隙, 啮合角, 广义啮合方程式

**中图分类号:** TH152

齿轮传动的齿侧间隙是一个重要参数。为了储存润滑油, 补偿因温升及制造带来的误差, 必须确保一定量的齿侧间隙。因此除应当合理掌握齿厚制造公差外, 还可以通过改变中心距来适当调整齿侧间隙的大小。所以建立各种齿轮传动的齿侧间隙与中心距的数学关系就十分必要。

## 1 圆柱齿轮传动的广义啮合方程式

设一对啮合的圆柱直齿传动节圆上的齿侧间隙为  $C'$ , 齿厚为  $S'$ , 节距为  $P'$ , 则当啮合中存在有齿侧间隙时

$$P' = S'_1 + S'_2 + C' \quad (1)$$

式中注脚“1”及“2”分别代表主动及从动齿轮。

设齿轮的分度圆齿厚为  $S$ , 齿距为  $P$ , 压力角为  $\alpha$ , 模数为  $m$ , 半径为  $r$ 。节圆上的传动啮合角为  $\alpha'$ , 半径为  $r'$ , 齿轮的齿数为  $z$ , 变位系数为  $x$ 。则

$$S'_1 = S_1 \frac{r'_1}{r_1} + 2r'_1(\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha')$$

$$S'_2 = S_2 \frac{r'_2}{r_2} + 2r'_2(\text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha')$$

\* 收稿日期: 1993-03-12

$$S_1 = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \operatorname{tg}\alpha\right)$$

$$S_2 = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \operatorname{tg}\alpha\right)$$

$$\frac{r_1'}{r_1} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{r_2'}{r_2} = \frac{P'}{P}$$

$$P = \pi m$$

$$r_1 = \frac{1}{2}mZ_1$$

$$r_2 = \frac{1}{2}mZ_2$$

将以上各式代入(1)式并化简得

$$\operatorname{inv}\alpha' = \frac{2(x_1 + x_2)}{Z_1 + Z_2} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{inv}\alpha + \frac{C' \cos\alpha'}{m(Z_1 + Z_2) \cos\alpha} \quad (2)$$

设法向齿侧间隙为 $C_n$ , 则因

$$C_n = C' \cos\alpha'$$

代入(2)式可得

$$\operatorname{inv}\alpha' = \frac{2(x_1 + x_2)}{Z_1 + Z_2} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{inv}\alpha + \frac{C_n}{m(Z_1 + Z_2) \cos\alpha} \quad (3)$$

上式表明齿侧间隙 $C_n$ 及变位系数 $x_1, x_2$ 对传动啮合角 $\alpha'$ 的影响。

因 $x_1, x_2, C_n$ 等参数的变化引起相对标准无侧隙啮合中心距的传动中心距变动量 $\Delta A$ 可按下式计算:

$$\Delta A = A' - A = A\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} - 1\right) \quad (4)$$

上式中“ $A'$ ”为参数变化后的新中心距“ $A$ ”为标准无侧隙啮合时的中心距, “ $\alpha$ ”及“ $\alpha'$ ”定义同前。

利用以上(3), (4)两式即可计算对应于一定量的齿侧间隙 $C_n$ 及变位系数 $x$ 的中心距变动量。当 $x_1 = x_2 = 0$ 时, (3)式直接描述了齿侧间隙对传动啮合角的影响。当 $C_n = 0$ 时(3)式即变为周知的无侧隙啮合方程式。

综以上述, 方程式(3)包含了有齿侧间隙和无齿侧间隙, 以及有变位修正与无变位修正(标准齿轮)这四种情况。全面地描述出圆柱齿轮的齿侧间隙、变位系数、啮合角(以及中心距)等传动参数之间的数学关系, 由本文作者推导出的此方程式应当看成是齿轮计算理论方面的一项创新, 因此我们称此方程为“广义啮合方程式”或“有侧隙啮合方程式”。

对于圆柱斜齿轮传动, 由于它的两个齿轮是在端面内啮合, 且每一个齿轮的端面理论齿形与圆柱下齿轮完全相同。计算其几何尺寸又是按端面参数, 所以对于圆柱斜齿轮传动亦应当按前述广义啮合方程式来分析其传动啮合角与齿侧间隙的关系。但需代入斜

齿轮的端面参数进行计算。设  $\alpha'_t$  为主斜齿轮的端面啮合角、 $x_t$  为端面变位系数、 $\alpha_t$  为端面分度圆压力角、 $m_t$  为端面模数、 $C_{nt}$  为端面法向齿侧间隙, 则可写出如下关系式:

$$\operatorname{inv}\alpha'_t = \frac{2(x_{1t} + x_{2t})}{Z_1 + Z_2} \operatorname{tg}\alpha_t + \operatorname{inv}\alpha_t + \frac{C_{nt}}{m_t(Z_1 + Z_2)\cos\alpha_t} \quad (5)$$

为计算方便起见, 将上式中的端面参数换算为法面参数, 令  $\alpha_n$ 、 $x_n$ 、 $m_n$ 、 $C_{nn}$  分别代表斜齿轮的法面压力角、法面变位系数、法面模数、法面法向齿侧间隙, 并令  $\beta$  为斜齿轮分度圆柱螺旋角, 则因

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_t &= \operatorname{tg}\alpha_n / \cos\beta \\ x_t &= x_n \cos\beta \\ m_t &= m_n / \cos\beta \\ C_{nt} &= C_{nn} / \cos\beta \\ \cos\alpha_t &= 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_t} = 1 / \sqrt{1 + (\operatorname{tg}\alpha_n / \cos\beta)^2} \end{aligned}$$

代入(5)式可得

$$\begin{aligned} \operatorname{inv}\alpha'_t &= 2(x_{1n} + x_{2n}) / (Z_1 + Z_2) \operatorname{tg}\alpha_n + \operatorname{inv}[\arctg(\frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\cos\beta})] \\ &+ \frac{C_{nn} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_n} / \cos\beta^2}{m_n(Z_1 + Z_2)} \end{aligned} \quad (6)$$

上式即为圆柱斜齿轮的广义啮合方程式。它反映了一对啮合斜齿轮的法向侧隙  $C_{nn}$  及法面变位系数  $x_{1n}$  及  $x_{2n}$  对其传动啮合角  $\alpha'_t$  的影响。中心距变动量  $\Delta A$  可按下式计算:

$$\Delta A = A \left( \frac{\cos\alpha_t}{\cos\alpha'_t} - 1 \right)$$

上式中“ $A$ ”为标准无侧隙啮合时的中心距。

## 2 蜗杆蜗轮传动的齿侧间隙与中心距变化量的关系

设蜗杆传动节线上的齿距为  $P'_w$ 、齿厚为  $S'_w$ 、齿侧间隙为  $C'_w$ , 则对于一对啮合的蜗杆蜗轮在节线上有

$$P'_w = S'_{1w} + S'_{2w} + C'_w \quad (7)$$

式中注脚“1”及“2”分别代表蜗杆和蜗轮。由于蜗轮节圆总是与分度圆重合, 故节距

$$P'_w = P_w = \pi m$$

式中  $m$  为模数。若令  $x_w$  代表蜗杆传动的变位参数,  $\alpha$  代表分度圆压力角,  $\Delta A$  代表

中心距变动量, 则因:

$$S'_{2w} = \frac{\pi m}{2} + 2x_w m \operatorname{tg} \alpha$$

$$S'_{1w} = \frac{\pi m}{2} - 2x_w m \operatorname{tg} \alpha - 2\Delta A \operatorname{tg} \alpha$$

代入(7)式并化简可得

$$\Delta A = \frac{C'_w}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

设  $C_n$  为法向齿侧间隙, 因  $C_n = C'_w \cos \alpha$ , 则上式变为

$$\Delta A = C_n / 2 \sin \alpha \quad (8)$$

(8)式可看成是, 蜗杆传动的广义啮合方程式, 它描述了蜗杆传动的中心距变化量  $\Delta A$  与齿侧间隙  $C_n$  这两者的关系。据此便可进行求解  $C_n$  或  $\Delta A$  值的计算。

### 3 结束语

本文是在现有齿轮啮合原理的基础上, 对几种齿轮传动的齿侧间隙与中心距的关系作一些初步的理论探讨。目的是想为准确地控制齿侧间隙和正确规定中心距公差提供理论依据。

本文即推导的圆柱齿轮传动广义啮合方程式全面地反映了变位系数与齿侧间隙这两者对传动啮合角及中心距的影响, 是机械原理中的“无齿侧间隙啮合方程式。”的进一步发展。

#### 参 考 文 献

- (1) Solving Gear Center Distance Equations. Machine Design. Vol 51 No 20. 1979
- (2) The New Encyclopaedia Britannica. Vol.11. 15th ed. 1974.
- (3) 黄锡恺主编. 机械原理

## Calculation of Meshing Angle with Consideration of Backlash in Gearing

**Abstract:** In this article we analyse the relation between backlash and meshing angle (center distance) of the spur gears, helical gears and worm gears, and obtain their numerical formulas, so as to give a theoretical evidence to the research of relevant tolerance norm (limit of tolerance) and backlash adjustment. The formulas are simple and clear enough to be utilized in practice.

**Keywords:** backlash, meshing angle, generalized meshing equation