一种拟协调元*

石东洋 蒋慧琴

(郑州大学) (郑州工学院)

摘 要: 本文给出了一种拟协调单元，并讨论了该单元近似解的收敛性。

关键词: 拟协调元，收敛性。

中图分类号: O29／O24

唐立民等[1, 2]于1979年提出了拟协调单元的概念，张鸿庆[3]首先对九参拟协调元进行了理论分析，证明这个元实际上等价于一个九参非协调元，最近，韩厚德[4]又给出了拟协调元的严格定义和收敛性讨论。本文将给出一种九参拟协调元，它的形函数空间与通常的九参元不同，九个参数则与著名的Veubcke三角形单元[5]的相同，最后我们分析了该单元的收敛性问题。

1 拟协调元的构造

设三角形单元K的三个顶点依反时针方向依次为a_1，a_2，a_3，对应的坐标是(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，对应的三边是F_1，F_2，F_3。它们也表示边长，其单元外法向向量分别为n_1，n_2，n_3，对应的面积坐标是λ_1，λ_2，λ_3，单元K的面积是$\triangle$，令

$$b_1 = y_2 - y_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2 \qquad c_2 = x_1 - x_3 \qquad c_3 = x_2 - x_1$$

$$r_1 = (b_2b_3 + c_2c_3) / \triangle \qquad r_2 = (b_1b_3 + c_1c_3) / \triangle \qquad r_3 = (b_1b_2 + c_1c_2) / \triangle$$

$$t_1 = (b_1^2 + C_1^2 / \triangle) \qquad t_2 = (b_2^2 + C_2^2 / \triangle) \qquad t_3 = (b_3^2 + C_3^2 / \triangle)$$

我们有:

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{i=1}^{3} c_i \qquad F_i = b_i^2 + c_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$z\triangle = b_i c_{i+1} - b_{i+1} c_i \qquad i = 1, 2, 3 \quad \text{对3求余数}$$

* 收稿日期: 1992-03-14

$$n_i=(-\frac{b_i}{F_i}-\frac{c_i}{F_i})\qquad(i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x}=\frac{b_i}{z\triangle}\qquad\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}=\frac{c_i}{z\triangle}\qquad(i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_1}=-\frac{1}{2F_1}(t_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}+r_3\frac{\partial}{\partial\lambda_2}+r_2\frac{\partial}{\partial\lambda_3})$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2}=-\frac{1}{2F_2}(r_3\frac{\partial}{\partial\lambda_1}+t_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}+r_1\frac{\partial}{\partial\lambda_3})$$

$$\frac{\partial}{\partial n_3}=-\frac{1}{2F_3}(r_2\frac{\partial}{\partial\lambda_1}+r_1\frac{\partial}{\partial\lambda_2}+t_3\frac{\partial}{\partial\lambda_3})$$

取九个自由度的不完全三次多项式函数空间：

$$\overline{P}_3(k)=Span\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_1\lambda_2,\ \lambda_2\lambda_3,\ \lambda_3\lambda_1,\ \lambda_1^2\lambda_2-\lambda_2^2\lambda_1-\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_3^2\lambda_2,\ \lambda_1^2\lambda_2-\lambda_2^2\lambda_1-\lambda_3^2\lambda_1+\lambda_3\lambda_1^2,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$$

显然 λ_1，λ_2，$\lambda_1\lambda_2$，$\lambda_2\lambda_3$，$\lambda_3\lambda_1$ 构成 $P_2(k)$的一组基，亦即$P_2(k)\subset\overline{P_3}(k)$.

我们来证明：

定理 1.1 对任给九个实数 β_1，β_2，…，β_9，存在唯一函数$u\in\overline{P_3}(k)$，使得：

$$\beta_1=u(a_1)\qquad\beta_2=u(a_2)\qquad\beta_3=u(a_3)$$

$$\beta_4=u(a_{12})\qquad\beta_5=u(a_{23})\qquad\beta_6=u(a_{31})$$

$$\beta_7=-2\int_{F_1}\frac{\partial u}{\partial n_1}ds\qquad\beta_8=-2\int_{F_2}\frac{\partial u}{\partial n_2}ds\qquad\beta_9=-2\int_{F_3}\frac{\partial u}{\partial n_3}ds$$

其中　$a_{ij}=\frac{1}{2}(a_i+a_j)$　　(i, j)=(1，2)　(2，3)　(3，1)

证明：对$\forall$　$u\in\overline{P_3}(k)$，u可表示为：

$$u=\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\alpha_3\lambda_3+\alpha_4\lambda_1\lambda_2+\alpha_5\lambda_2\lambda_3+\alpha_6\lambda_3\lambda_1$$

$$\alpha_7(\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_2^2\lambda_1-\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_3^2\lambda_2)+\alpha_8(\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_2^2\lambda_1-\lambda_3^2\lambda_1+\lambda_3\lambda_1^2)+\alpha_9\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

将 u 的表达式代入上面式子的右端，得到系数 α_1，α_2，…α_9 满足的方程组：

$$\beta=G\alpha$$

其中　$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_9)$　　$\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_9)^T$

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & r_3 & r_2 & \frac{1}{2}t_1 & -\frac{1}{2}t_1 & \frac{1}{2}t_1 & -\frac{1}{3}t_1 & -\frac{2}{3}t_1 & \frac{1}{6}t_1 \\ r_3 & t_2 & r_1 & \frac{1}{2}t_2 & \frac{1}{2}t_2 & -\frac{1}{2}t_2 & \frac{2}{3}t_2 & \frac{1}{3}t_1 & \frac{1}{6}t_2 \\ r_2 & r_1 & t_3 & -\frac{1}{2}t_3 & \frac{1}{2}t_3 & \frac{1}{2}t_3 & -\frac{1}{3}t_3 & \frac{1}{3}t_3 & \frac{1}{6}t_3 \end{bmatrix}$$

经计算可知 $|G|=\frac{1}{6\times 4^3}t_1t_2t_3=\frac{1}{6\times 4^3}\frac{F_1^2F_2^2F_3^2}{\triangle^3}\neq 0$

即在剖分下 G 非奇异，

$$\alpha=G^{-1}\beta$$

从而 u 唯一确定，证完.

由定理 1-1 可构造出如下九参三角形单元：以三角形单元 K 三个顶点上的函数值，三边中点上的函数及三边上外法向微商的平均值作为九个参数并且 $P_k=\overline{P}_3(k)$ 取为形函数空间.

2 收敛性分析

设 $\Omega\subset R^2$ 是有界开区域，边界为 Γ，J_n 是 Ω 的正则三角形剖分，$\Omega=\bigcup_{K\in J_n} k$，$L_\Omega$ 表示 Ω 内单元的边的全体，L_T 表示与 Γ 重合的边的全体，以 A_Ω 表示 Ω 内所有单元 k 的顶点的集合，A_Γ 表示 Γ 上所有单元顶点的集合. 设 $V^n(\Omega)$ 是由 J_n 与上述九参三角形单元 $(K,\ P_k,\ \sum_k)$ 诱导出来的有限元空间

令 $V_0^h(\Omega)=\{u\in V^h(\Omega)|u(a_i)=0 \quad \forall a_i\in A_\Gamma$ 及

$$\int_l\frac{\partial u}{\partial n}dl=0 \quad \forall\ l\in L_\Gamma$$

$$\|\cdot\|_h=(\sum_k|\cdot|_{2,k}^2)^{\frac{1}{2}}$$

容易验证，上述九参三角形单元是拟协调单元，$V^h(\Omega)$ 是 $H^2(\Omega)$ 的拟协调有限元空间，亦即满足定义[4]：

$$\begin{cases}\forall\ u\in V^h(\Omega) & \text{满足条件:}\\ (i)\quad u\text{在}a_i\text{点连续} & \forall a_i\in A_\Omega+A_\Gamma\\ (ii)\quad \int_l[(\frac{\partial u}{\partial n})^+-(\frac{\partial u}{\partial n})^-]dl=0 & \forall\ l\in L_\Omega\end{cases}$$

其次，利用[4]及[6]的方法知，$V_0^h(\Omega)$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 的准协调有限元空间，$\|\cdot\|_h$ 是 $V_0^h(\Omega)$ 上的范数。

因此，对板弯曲问题：求 $u\in H_0^2(\Omega)$ 满足：

$$(I)\qquad a(u,\ v)=f(v)\qquad \forall\ v\in H_0^2(\Omega)$$

$$a(u,\ v)=\int_\Omega[\triangle u\triangle v+(1-\sigma)(2U_{xy}V_{xy}-U_{xx}V_{yy}-U_{yy}V_{xx})dxdy$$

$$f(v)=\int_\Omega fvdxdy\qquad (0<\sigma<\frac{1}{2}\text{是}poisson\text{比})$$

的逼近问题：求 $u_h\in V_0^h(\Omega)$ 满足：

$$(\mathrm{II})\qquad a_h(u_h,\ v_h)=f(v_h)\qquad \forall\ v_h\in V_0^h(\Omega)$$

$$a_h(u_h,\ v_h)=\sum_K\int_k[\triangle u_h\triangle v_h+(1-\sigma)(2u_{hxy}v_{hxy}-u_{hxx}v_{hyy}-u_{hyy}v_{hxx})]dxdy$$

利用[4]中的定理 2.1 及分析非协调元的标准技巧[7]不难证明：

定理 2.1 设问题(I)的 $u\in H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$，则问题 (II) 存在唯一解 $u_h\in V_0^h(\Omega)$，使得：

$$\|u-u_h\|_h\leqslant ch(|u|_3+h|u|_4)$$

$$|u-u_h|_{L^2(\Omega)}\leqslant ch^2(|u|_3+h|u|_4)$$

注 2.1 本文中 $\overline{P}_3(k)$ 的还可以取成如下两种等价形式：

$$\overline{P}_3(k)=Span\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_1\lambda_2,\ \lambda_2\lambda_3,\ \lambda_3\lambda_1,\ \lambda_1^2\lambda_2-\lambda_2^2\lambda_1-\lambda_3^2\lambda_1+\lambda_1^2\lambda_3,\ \lambda_2^2\lambda_3-\lambda_3^2\lambda_2-\lambda_3^2\lambda_1+\lambda_1^2\lambda_3,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$$

或 $$\overline{P}_3(k)=Span\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_1\lambda_2,\ \lambda_2\lambda_3,\ \lambda_3\lambda_1,\ \lambda_1^2\lambda_2-\lambda_2^2\lambda_1-\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_3^2\lambda_2,\ \lambda_2^2\lambda_3-\lambda_3^2\lambda_2+\lambda_1^2\lambda_3-\lambda_3^2\lambda_1,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}$$

(下转第 118 页)

参 考 文 献

〔1〕 龚升．从刘徽割圆谈起．人民教育出版社．1964

〔2〕 王升谟．郭敦仁．特殊函数概论．科学出版社．1979

〔3〕 菲赫金哥尔茨．Γ. M.，微积分教程．第二卷第三分册．人民教育出版社

The Recurrence Formula of Sum of the Classificatory Infinite Seriescs

Xing Enkuan

(Zhengzhou Railway Education Colledge)

Abstract: With the help of Γ-function, the series (1) and series (2)are transformed into the forms of generalized integral, and then deduce their recurrence formulas with the method of complex analysis in the paper.

Keywords: infinite series, convergence, recurrence, Γ-function, generalized integral.

(上接 113 页)

参 考 文 献

〔1〕 唐立民等．有限元分析中的拟协调元．大连工学院学报．19: 2(1980), 19—35

〔2〕 陈万吉等．拟协调元列式．大连工学院学报．19: 2(1980) 37—49

〔3〕 Zhang-Hongqing. The generalized patch test and 9—parameter quas-conforming element. proc. china-France symposium on finite element methods, Feng Kong and J. L. Lions (ed.) Science press. Gordon and Breach. 1983, 566—583

〔4〕 韩厚德．关于拟协调单元的注记．计算数学，10: 2(1986). 173—180

〔5〕 P. G. Ciarlet. Finite element method for elliptic problems. North-Holland. 1978

〔6〕 石钟慈．陈绍春．九参数广义协调元的收敛性．计算数学，2(1991) 193—203

〔7〕 P. Las Caux and P. Lesaint, some nonconforming finite elements for the plate bending problems. RAIRO. Anal. Numer. 9(1975) 9—53

A kind of pseu-do-conforming element

Shi Dongyang Jiang Huiqin

(Zhengzhou University) (Zhengzhou Institute of Technolge)

Abstract: In this paper a new kind of pseu-do-conforming element is presented and it⊂s convergence is discussed.

Keywords: pseu-do-conforming, convergence.