第14卷 第1期　　郑州工学院学报　　Vol.14 No.1
1991年 3 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Mar. 1993

标准对数正态分布的极大值分布和矩的渐近性质*

陆宜清　　杨松华

(郑州牧专)　(郑州工学院数力系)

摘　要：本文考察了底分布为标准对数正态分布时，独立同分布随机变量序列的极大值的分布和矩的渐近性质。

关键词：极大值，矩，标准对数正态分布

中图分类号：O242

关于独立随机变量序列极值的“规范化”的分布与矩的渐近性质，人们进行过许多研究。如 Aiyappan 对底分布为正态分布的极大值的分布和矩的渐近性质进行了研究。尽管标准对数正态分布可以转化为正态分布，但直接引用 Aiyappan 的方法和结论来处理标准对数正态分布的极大值问题仍有较大困难。因此，本文另辟途径，较为顺利地克服了困难，得到了希望的结论。而且，可以发现，所得结果和 Aiyappan 关于底分布为标准正态分布时的结果相似，且应用本文的方法能够将 Aiyappan 关于底分布为标准正态分布的极大值的分布和矩的渐近性质中难于说清的问题说清楚。

1　引论

设 x_1、x_2、$\cdots x_n$，为 i，i，d，r，v，$\ln x_i \sim N(0.1)$，$1 \leq i \leq n$，即 x_i 服从标准对数正态分布，又记$_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$为 x_1、x_2、$\cdots x_n$ 的顺序统计量。本文总以 f(x)、F(x)表示标准正态随机变量的密度和分布函数，即

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ -\infty<x<+\infty$$

易知，在上述记号表示的意义下有

* 收稿日期：1992-02-18

$$P\{X_i \leqslant x\} = F(lnx),\ x>0$$

$$P\{X_{(n)} \leqslant x\} = F^n(lnx),\ x>0 \tag{1.1}$$

又记U_n满足

$$1-F(U_n)=\frac{1}{n} \tag{1.2}$$

则有

$$U_n=\sqrt{2lnn}-\frac{lnlnn+ln4\pi}{2\sqrt{2lnn}}+0(\frac{1}{lnn}) \tag{1.3}$$

由此易见

$$U_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty,\ \frac{U_n}{\sqrt{2lnn}} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \tag{1.4}$$

为得到本文的主要结论，需先证明如下有关正态分布的性质.

引理 1.1. 对标准正态分布函数 F(x)及其密度 f(x)，成立

$$1-F(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{1}{x^3}f(x)+\theta(x)\cdot\frac{3}{x^5}f(x),\ x>0 \tag{1.5}$$

其中$\theta(x)$满足：$0<\theta(x)<1$.

引理 1.2. 对满足(1.2)的 U_n，可有

$$\frac{nf(U_n)-U_n}{U_n}=\frac{1}{U_n^2}+\frac{\varepsilon_n}{U_n^2} \tag{1.6}$$

其中$\varepsilon_n=-\frac{2}{U_n^2}(1-\frac{\delta_n}{2})$，$\delta_n<2$ 且 $\delta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

证明：用洛必塔法则即可证得.

由引理 1.2 的结论易知

$$\frac{nf(U_n)}{U_n} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \tag{1.7}$$

引理1.3对任一取定的实数x，成立

$$n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))] \underset{n\to\infty}{\to} e^{-x} \tag{1.8}$$

证明：利用引理 1.1 的结论(1.5)，再注意到

$$\frac{x}{U_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$f(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))=f(U_n)\cdot e^{-U_n ln(1+\frac{x}{U_n})}\cdot e^{-\frac{l_n^2(1+\frac{x}{U_n})}{2}},$$

$$e^{-U_n ln(1+\frac{x}{U_n})} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-x}$$

故由(1.7)即得(1.8)。

由引理1.3立即得到如下定理

定理1.1 $X_{(n)}$的“规范化”$U_ne^{-U_n}X_{(n)}-U_n$的极限分布是Gumbel分布，即

$$P\{U_ne^{-U_n}X_{(n)}-U_n\leqslant x\}\underset{n\to\infty}{\to}e^{-e^{-x}},\quad -\infty<x<+\infty$$

2 $X_{(n)}$的分布的渐近性质

引理2.1 对任一取定的实数x，成立

$$\lim_{n\to\infty}U_n\{U_n[-n(1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n})))+e^{-x}]-a(x)\}=b(x) \tag{2.1}$$

其中 $a(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}$，$b(x)=(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8})e^{-x}$

引理2.2对任一取定的实数x，成立

$$\lim_{n\to\infty}U_n^2\{e^{-n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]}-[F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]^n\}=0 \tag{2.2}$$

关于$X_{(n)}$的“规范化”$U_ne^{-U_n}X_{(n)}-U_n$的分布的渐近性质，我们有如下结论：

定理2.1 对任一取定的实数x，成立

$$\lim_{n\to\infty}U_n\{U_n[P\{U_ne^{-U_n}X_{(n)}-U_n\leqslant x\}-e^{-e^{-x}}]-a(x)e^{-e^{-x}}\}$$

$$=[b(x)+2^{-1}a^2(x)]e^{-e^{-x}} \tag{2.3}$$

证明：由于$P\{U_ne^{-U_n}X_{(n)}-U_n\leqslant x\}=F^n(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))$，根据引理2.2知，欲证(2.3)与如下的

$$\lim_{n\to\infty}U_n\{U_n[e^{-n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]}-e^{-e^{-x}}]-a(x)e^{-e^{-x}}\}$$

$$=[b(x)+2^{-1}a^2(x)]e^{-e^{-x}} \tag{2.4}$$

等价。注意

$$U_n\{U_n[e^{-n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]}-e^{-e^{-x}}]-a(x)e^{-e^{-x}}\}$$

$$=U_n\{U_n[e^{-n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]+e^{-x}}-1]-a(x)\}\cdot e^{-e^{-x}}$$

$$=U_n\{U_n[-n(1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n})))+e^{-x}]-a(x)\}\cdot e^{-e^{-x}}+U_n^2[-n(1$$

$$-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n})))+e^{-x}]^2\cdot\{\frac{1}{2}+[-n(1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n})))$$

$$+e^{-x}]\cdot\sum_{i=3}^{\infty}\frac{[-n(1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))+e^{-x}]^{i-3}}{i!}\}\cdot e^{-e^{-x}} \tag{2.5}$$

由引理1.3，$-n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]+e^{-x}\underset{n\to\infty}{\to}0$，

故有

$$|\sum_{i=3}^{\infty}\frac{[-n(1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))+e^{-x}]^{i-3}}{i!}|\leqslant e^{|-n(1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))+e^{-x}|}\triangleq l_n$$

由(2.1)又易知

$U_n[-n(1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))+e^{-x}]\underset{n\to\infty}{\to}a(x)$，再注意(2.4)立即得出定理的结论。

3　矩的渐近性质

为了得到$X_{(n)}$的"规范化"$U_ne^{-U_n}X_{(n)}-U_n$的矩的渐近性质，需要如下一系列引理。

引理3.1 对任意固定的非负整数r，n充分大后，函数

$$X^rU_n\{U_n[-n(1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n})))+e^{-x}]-a(x)\}e^{-e^{-x}}I_{(-\sqrt{U_n},\sqrt{U_n})}(x)$$

被与n无关的可积函数所控制。

引理3.2 对任意取定的非负整数r，n充分大后，函数

$$X^rU_n\{U_n[e^{-n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]}-e^{-e^{-x}}]-a(x)e^{-e^{-x}}\}I_{(-\sqrt{U_n},\sqrt{U_n})}(x)$$

被与n无关的可积函数所控制。

引理3.3 对任意固定的i，j>0成立

$$\lim_{n\to\infty}U_n^i\int_{\sqrt{U_n}}^{+\infty}x^je^{-x}e^{-e^{-x}}dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty}U_n^i\int_{\sqrt{U_n}}^{+\infty}x^j(1-e^{-e^{-x}})dx=0$$

引理3.4 对任意固定的i，j>0，成立

$$\lim_{n\to\infty}U_n^i\int_{-\infty}^{-\sqrt{U_n}}|x|^j(e^{-x}-e^{-e^{-x}})dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n^i \int_{-\infty}^{-\sqrt{U_n}} |x|^j \cdot e^{-e^{-x}} dx = 0$$

引理 3.5 对任意固定的 i、j>0，成立

$$\lim_{n\to\infty} U_n^i \int_{\sqrt{U_n}}^{+\infty} |x|^j (1 - F^n(U_n + ln(1 + \frac{x}{U_n}))) dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n^i \int_{U_n}^{-\sqrt{U_n}} |x|^j F^n(U_n + ln(1 + \frac{x}{U_n})) dx = 0$$

引理 3.6 对任意固定的 i、j>0，成立

$$\lim_{n\to\infty} U_n^i \int_{-\sqrt{U_n}}^{\sqrt{U_n}} x^j \{e^{-n[1-F(U_n + ln(1+\frac{x}{U_n}))]} - F^n(U_n + ln(1 + \frac{x}{U_n})) dx = 0$$

对 r>0，以$m_{r(n)}$ 和 m_r 分别表示分布 $F^n(U_n + ln(1 + \frac{x}{U_n}))$ 和 $e^{-e^{-x}}$ 的 r阶矩，即

$$m_r(n) = \int_{-U_n}^{+\infty} x^r dF^n(U_n + ln(1 + \frac{x}{U_n}))$$

$$M^r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r de^{-e^{-x}}$$

由上述几个引理，我们可得如下结论.

定理 3.1. 设$m_r(n)$ 和 m^r 分别表示分布 $F^n(U_n + ln(1 + \frac{x}{U_n}))$ 和 $e^{-e^{-x}}$ 的 r阶矩，则有

$$U_n^2[m_r(n) - m_r] - 2^{-1} U_n r m_{r+1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} -\frac{r}{24}[24m_r + 12m_{r+1} - (1+3r)m_{r+2}]$$

证明: $m_r(n) - m_r$

$$= \int_{-U_n}^{+\infty} x^r dF^n(U_n + ln(1 + \frac{x}{U_n})) - \int_{-\infty}^{+\infty} x^r de^{-e^{-x}}$$

$$= r\int_{-U_n}^{+\infty} x^{r-1}[e^{-e^{-x}} - F^n(U_n + ln(1 + \frac{x}{U_n}))]dx + r\int_{-\infty}^{-U_n} x^{r-1} e^{-e^{-x}} dx$$

因此，由定理 2.1，引理 3.1—3.6 及

$$\int x^k e^{-x} de^{-e^{-x}} = -km_{k-1} + m_k$$

我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\{U_n^2[m_r(n)-m_r]-2^{-1}U_n r m_{r+1}\}$$

$$=-r\lim_{n\to\infty}U_n^2\int_{-\sqrt{U_n}}^{\sqrt{U_n}}x^{r-1}[F^n(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))-e^{-n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]}dx$$

$$-r\lim_{n\to\infty}U_n\int_{-\sqrt{U_n}}^{\sqrt{U_n}}x^{r-1}\{U_n[e^{-n[1-F(U_n+ln(1+\frac{x}{U_n}))]}-e^{-e^{-x}}]-a(x)e^{-e^{-x}}\}dx$$

$$=-r\lim_{n\to\infty}U_n^2\int_{-\infty}^{+\infty}[b(x)+2^{-1}a^2(x)]x^{r-1}e^{-e^{-x}}dx$$

$$=-\frac{r}{24}[24m_r+12m_{r+1}-(1+3r)m^{r+2}]$$

参　考　文　献

〔1〕 K. Aiyappan Nair. Asymptotic distribution and moments of normal extremes. The Annals of Probability, 1981. Vol. 9. No.1. 150～153

〔2〕 James R. Mc Cord. On asymptotic moments of extreme statistics. Ann Math Statist 35 (1964) 1738～1745.

〔3〕 Leadbetter. M. R. Geory Lindgrea and Rootren, Extreme and Related properties of Redom Sequence and processes. Springer Verlag, New York, 1983

Asymptotic Property of Extremal Distribution and Moment of Standard Logarithmic Normal Distribution

Lu Yiqing　　Yang Songhua
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, the asymptotic properties of the distribution and moment of maximum of independent random variables sequence with standard logarithmic normal distribution as base distribution are discussed.

Keywords: Maximum, Moments, Standard LOgarithmic normal distribution