第14卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.14 No.1
1993年 3 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Mar. 1993

最优离散控制系统的参数化设计

冯冬青 谢宋和

(郑州工学院 计算机与自动化系) (郑州轻工业学院 控制工程系)

摘 要：本文提出了一种基于离散系统LQ逆问题分析的最优控制系统设计方法，得到了线性最优系统开环和闭环特征多项式系数与二次型性能指标中的加权矩阵之间的解析关系．最后分析了LQ逆问题解的存在条件，以便合理选择期望的闭环极点，使之成为一组最优极点．

关键词：离散系统，最优控制，LQ逆问题，闭环极点配置

中国图书分类号：TP273.1

考虑一个线性定常可控系统

$$X(k+1)=AX(k)+BU(k) \tag{1}$$

其中 A 和 B 分别是适当维数的常数矩阵．所谓 LQ 逆问题指的是：要确定一个线性状态反馈控制规律

$$U(k)=-FX(k)$$

使线性二次型性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[X^T(k)QX(k)+U^T(k)RU(k)] \tag{2}$$

达到极小,式中 $Q\geqslant 0$，$R>0$，并且使闭环系统

$$X(k+1)=(A-BF)X(k)=A_cX(k) \tag{3}$$

具有希望的闭环极点 Z_{c1}，Z_{c2}，…，Z_{cn}．因此，研究 LQ 逆问题的意义在于：所得闭环系统具有最优控制意义下的最优鲁棒性和极点配置方法的良好动态特性双重优点．

文献[1]在研究LQ逆问题方面取得了脸些进展，首次得到了加权矩阵与系统的开环和闭环特征多项式系数之间的一个解析关系．在假设开环特征多项式系数全不为零的前提条件下，若给定一组期望的闭环极点，可以确定一个与之对应的加权矩阵Q．

本文提出了一种新的最优控制系统设计方法，得到了LQ逆问题解的参数化公式．只要给定一组期望的闭环极点，马上可以确定与之对应的全部加权矩阵Q（在R一定的条件下），计算非常简单．并且不必求解复杂的代数Riccati方程也可直接确定满足极点配置要求的最优状态反馈增益矩阵F．

1 LQ逆问题解的参数化公式

众所周知，与系统（1）和性能指标（2）相对应 Riccati 方程为

$$P = A^T PA - A^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA + Q \tag{4}$$

以及使性能指标(2)极小的最优控制为

$$U(k) = -(R + B^T PB)^{-1} B^T PAX(k) \tag{5}$$

当 A 可逆时，令 C 是 A 的逆矩阵，我们可以根据以上 *Riccati* 方程中的系数矩阵构造一个 *Hamilton* 矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T C^T Q & -BR^{-1}B^T C^T \\ -C^T Q & C^T \end{bmatrix} \tag{6}$$

若引进变换矩阵T

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \tag{7}$$

使

$$T^{-1} M T = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中S_{11}是一个由位于单位圆内的M矩阵的特征值所表征的实矩阵.

那么由（8）式有

$$\begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^T C^T Q & -BR^{-1}B^T C^T \\ -C^T Q & C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

由上式等号两边矩阵乘积的第一列分块矩阵可得:

$$-C^T Q T_{11} + C^T T_{21} = T_{21} S_{11}$$

$$A T_{11} + BR^{-1} B^T C^T Q T_{11} - BR^{-1} B^T C^T T_{21} = T_{11} S_{11}$$

即

$$Q = T_{21} T_{11}^{-1} - A^T T_{21} S_{11} T_{11}^{-1} \tag{9}$$

$$A T_{11} - T_{11} S_{11} = BR^{-1} B^T T_{21} S_{11} \tag{10}$$

因此，有离散系统LQ逆问题解的参数化表示结果如下:

定理1　使闭环系统(3)具有指定极点$Z_{c1}, Z_{c2}, \cdots, Z_{cn}$的加权矩阵$Q$可以参数化表示为:

$$Q = T_{21} T_{11}^{-1} - A^T T_{21} S_{11} T_{11}^{-1} \tag{11}$$

且

$$F = (R + B^T T_{21} T_{11}^{-1} B)^{-1} B^T T_{21} T_{11}^{-1} A \tag{12}$$

其中 S_{11} 是一个特征值集合为 $\{Z_{c1}, Z_{c2}, \cdots, Z_{cn}\}$ 的实矩阵，且参数阵 T_{11} 和 T_{21} 满足以下条件

第1　T_{11}是非奇异矩阵

第2　T_{11}和T_{21}满足矩阵代数方程

$$AT_{11}-T_{11}S_{11}=BR^{-1}B^{T}T_{21}S_{11} \tag{13}$$

第3 (11)式中的Q阵是对称半正定矩阵

由定理1可见，LQ逆问题解的存在性转化为满足以上约束条件的参数阵T_{11}和T_{21}是否存在的问题，一旦找到了满足要求的T_{11}和T_{21}，即可确定对应的加权矩阵Q和最优状态反馈增益矩阵F，从而设计出一个具有指定闭环极点的最优控制系统。

2 单输入系统的LQ逆问题分析

我们已经知道，对于任何一个单输入线性定常可控系统，总存在一个线性变换，使其变换成为可控标准型

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & & I_{n-1} \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{14}$$

其对应的开环特征多项式为

$$P_0(Z)=a_nZ^n+a_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+a_0,\quad a_n=1 \tag{15}$$

若期望的闭环极点分别为$Z_{C1},Z_{C2},\cdots,Z_{Cn}$，则对应的闭环特征多项式为

$$P_C(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-z_{Ci})=\sum_{i=0}^{n}b_iz \tag{16}$$

因此，我们可以选择

$$S_{11}=\begin{bmatrix} 0 & & & I_{n-1} \\ -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{n-1}\end{bmatrix} \tag{17}$$

若取$T_{11}=I_n$，$R=1$，则(10)式简化为

$$A-S_{11}=BR^{-1}B^{T}T_{12}S_{11} \tag{18}$$

由(18)式可以求得

$$t_{n,i}=a_ob_i/b_o-a_i \quad i=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

其中$t_{i,j}$表示矩阵T_{21}的第i行第j列元素。

定理2 当$T_{21}=T_{21}^{T}$时,则$Q=Q^{T}$,即Q阵是对称阵。

证明：通过矩阵运算可得

$$(A^{T}T_{21}S_{11})_{i,j}=a_{i-1}a_{j-1}-a_0b_{i-1}b_{j-1}/b_0+t_{i-1,j-1} \tag{20}$$

因此 $$Q_{i,j}=t_{i,j}-t_{i-1,j-1}+a_ob_{i-1,j-1}/b_o-a_{i-1}a_{j-1} \tag{21}$$

由(21)式可见，$A_{i,j}=Q_{j,i}$，即加权矩阵Q是对称阵。

定理3 对于$SISO$系统(14)而言，由不同的权阵$\hat{Q}$和$\overline{Q}$可以确定相同的状态反馈增

益矩阵 F，其充分必要条件是：过权阵$\hat{Q}$ 和$\overline{Q}$ 的第一列（或第一行）元素，并且平行于主对角线的直线所穿过的各个元素的代数和依次相等。

证明: 对于离散系统(14)，我们有

$$a_0P_c(z)P_c(z^{-1})/b_0=P_0(z)P_0(z^{-1})+$$
$$[adj(z^{-1}I_n-A)B]^TQ[adj(zI_n-A)B] \tag{22}$$

因为　$adj(zI_n-A)=[1z\cdots z^{n-1}]^T$

所以，　(22)式可以等价地改写成

$$a_oP_c(z)P_c(z^{-1})/b_0=P_0(z)P_0(Z^{-1})+$$
$$\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{m=1}^{n-1}Q_{i+m,m})z^{-1}+\sum_{i=0}^{n-1}(\sum_{m=1}^{n-1}Q_{m,m+1})z \tag{23}$$

由上式可见，对于不同的权阵 Q，可以得到相同的闭环特征多项式 $P_c(z)$(或状态反馈增益 F)，当且仅当其代数和 $\sum_{m=1}^{n-1}Q_{m+1,m}$(或 $\sum_{m=1}^{n-1}Q_{m,m+1}$) 分别相等．而它们又分别表示过 Q 阵中的第一列元素 $Q_{i+1,1}$（或第一行元素 $Q_{1,i+1}$），并且平行于主对角线的直线所穿过的各个元素的代数和。

定理4　对于任何一个$SISO$可控系统，使对应的闭环系统具有指定极点Z_{ci}的加数矩阵Q可以由下式确定

$$Q=T^T\overline{Q}T \tag{24}$$

其中T表示可控标准型变换矩阵，$\overline{Q}$满足

$$\overline{Q}_{i,j}=t_{i,j}-t_{i-1,j-1}+a_0b_{i-1}b_{j-1}/b_0-a_{i-1}a_{j-1} \tag{25}$$

其中$\overline{Q}_{i,j}$，$t_{i,j}$分别表示矩阵$\overline{Q}$和T_{21}的第i行第j列元素，且$t_{i,j}$满足

$$t_{i,j}=\begin{cases}t_{i,j} & i,j=1,2,\cdots,n\\ \text{自由参数} & 0<i\text{和}j<n\\ 0 & i\text{或}j<1\end{cases} \tag{26}$$

$$t_{n,i}=t_{i,n}=a_0b_i/b_0-a_i \quad i=1,2,\cdots,n \tag{27}$$

证明: 由定理 1 和定理 2 可得。

3　LQ 逆问题解存在的必要条件

引理 1　假设 M 和 N 分别是 n×m，m×n 的实矩阵，则有

$$\det(I_n+MN)=\det(I_m+NM)$$

引理 2　假设 D 和 E 均为 n 维实对称阵，当 D>E 时，即(D−E)是半正定矩阵时，则有

$$\det D\geq\det E$$

定理 5　设 z_{0i}，z_{ci} (i=1,2,⋯,n) 分别是系统 (1) 的开环极点和系统 (3) 的闭环极

点，则有以下不等式成立

$$\prod_{i=1}^{n} z_{0i} / \prod_{j=1}^{n} z_{ci} \geqslant 1$$

$$0 < \prod_{i=1}^{n} z_{0i} z_{ci} \leqslant 1$$

证明：经适当的代数变换后,由(3)式和(5)式可以得到

$$A_c = (I_n + BR^{-1}B^T P)^{-1} A$$

因此，$det\ A_c \cdot det(I_n + BR^{-1}B^T P) = det A$

由引理1和引理2有

$$det(I_n + BR^{-1}B^T P) = det(R + B^T PB) / det R \geqslant 1$$

因此，$det A / det A_c \geqslant 1$，即$\prod_{i=1}^{n} z_{0i} / \prod_{i=1}^{n} z_{ci} \geqslant 1$

把(5)式中的F代入(4)式可得

$$P = A^T P A_c + Q$$

由于$Q \geqslant 0$，因此有

$$det P \geqslant det\ A \cdot det\ P \cdot det\ A_c$$

即 $$det\ A \cdot det\ A_c \leqslant 1$$

因此， $0 \leqslant \prod_{i=1}^{n} z_{0i} z_{ci} \leqslant 1$得证.

定理6 若a_i，b_i $(i = 0,1,\cdots,n)$分别是单输入系统(1)和(3)的开环和闭环特征多项式系数，则有下式成立

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} b_i^2 / b_0 \geqslant \sum_{i=0}^{n} a_i^2$$

证明：为了简便起见，假设系统为可控标准型(14)，则由定理4可得

$$Q_{i,j} = t_{i,j} - t_{i-1,j-1} + a_0 b_{j-1}^2 / b_0 - a_{j-1}^2$$

因此$trQ = t_{n,n} + a_0 \sum_{j=1}^{n} b_{j-1}^2 / b_0 - \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}^2$

又有 $t_{n,n} = a_0 / b_0 - 1$

故 $$trQ = a_0 \sum_{i=0}^{n} b_i^2 / b_0 - \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \tag{28}$$

由于$Q \geqslant 0$，因此$trQ \geqslant 0$，根据(28)式得证.

显然，定理5和定理6中的不等式是LQ逆问题解存在的必要条件，并且（28）式反映了加权矩阵Q和特征多项式系数之间的直接关系. 不难验证，文〔2〕中的结果只是本文（28）式的一种特殊情况.

4 举例

已知某二阶可控系统为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

若希望的闭环极点分别为0.3和0.4，则根据定理4可以得到

$$Q=\begin{bmatrix}t_{1,1}-0.88 & -7.6/3\\ -7.6/3 & 89/12-t_{1,1}\end{bmatrix}\tag{29}$$

把A，B，Q，$R=1$代入(4)式求$Riccati$方程得P，而后由(5)式可得

$$F=[-0.88\quad 1.3]\tag{30}$$

不难验证(30)式满足指定闭环极点配置的要求，并且文〔1〕中的 Q 只是(29)式的一个特例。

参 考 文 献

〔1〕 王耀青．离散系统最优调节器的逆问题．控制与决策．1988．3(1)：52-53

〔2〕 迟丽华等．二阶离散系统最优闭环极点配置．控制理论与应用．1989．6(1)：73-75

The Parametic Design of Optimal Discrete Control Systems

Feng Dong qing　　　　Xie Song he

(Zhengzhou Institute of Technology)(Zhengzhou Institute of Light Industry)

Abstract: In this paper ,the design method of optimal control systems is presented based on the analysis of the LQ inverse problem for discrete systems .The analytical relationship among the coefficients of open loop and closed-loop charateristic polynomials of the linear optimal control system and weighting matrices in the linear quadratic performance index is obtained.In the end , the existensive conditions of the solutions to LQ inverse problem are analysed so as to choose the desired closed-loop poles, which become a set optimal poses.

Keywords: Discrete system , optimal control, LQ Inverse Problem, pole assignment.