第13卷 第4期 郑州工学院学报 Vol.13 No.4
1992年 12月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Dec. 1992

数学模型在机、电上的应用*

马桂荣 张永红 侯军才 李 特

(郑州工学院)

摘 要: 本文采用机理分析和量纲分析的方法，建立了机械零件及整个系统的传递函数的数学模型和有功功率负荷在已运行机组间的最优分配模型等. 从而探讨在机械和电学方面建立初等模型和优化模型的基本方法.

关键词: 机械导纳、机械阻抗、有功功率.

中图分类号: 0141.4

现代科学技术发展的一个重要特征是各门科学技术日益精确化、数量化. 正如马克思说的那样:"一种科学只有在成功地应用数学时，才算达到真正完善的地步"，一门科学要能运用数学，首先必须建立它各种有关的数学模型，定量地描述事物的本质. 否则应用数学将是一句空话. 因此，数学模型成为人们研究客观世界的有力工具之一. 下面是在机械和电学方面探讨建立初等模型和优化模型的三个实例.

1 机械零件以及整个系统的传递函数的数学模型

用工程控制理论分析研究机械系统的动态性能，就需要建立有关零部件的机械导纳和机械阻抗公式.

首先建立此数学模型作如下假设

①质量集中.

②弹簧效应理想化为一刚度系数.

③粘滞阻尼效应理想化为一刚度系数.

1.1 惯性质量 m 的机械导纳为 Mm

设输出速度为V; 输入力为F; D为微分变换符号. 则$mDV = F$

惯性质量的机械导纳

$$Mm = \frac{V}{F} = \frac{1}{mD}$$

1.2 刚度系数为K的弹簧的机械导纳M_K，如图1

$F = K(x_i - x_0)$

$\frac{dF}{dt} = K\frac{d}{dt}(x_i - x_0) = KV$

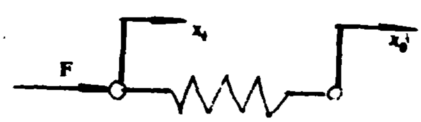

图1

弹簧的机械导纳为:

$$M_K=\frac{V}{F}=\frac{D}{K}$$

1.3 速度阻尼系数为C的粘滞阻尼器的机械导纳M_c，如图2，不计运动质量：

$$F=C\frac{d}{dt}(x_i-x_0)=CV$$

阻尼器的机械导纳为：

$$M_c=\frac{V}{F}=1/c$$

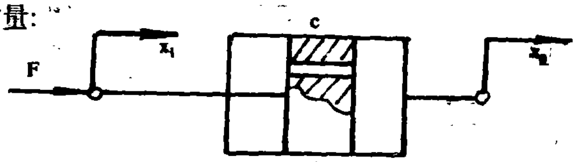

图2

机械导纳的倒数是机械阻抗，以上三种机械元件的阻抗分别为：

$$Z_m=\frac{1}{Mm}=mD$$

$$Z_K=\frac{1}{M_K}=\frac{K}{D}$$

$$Z_c=\frac{1}{M_c}=C$$

上述三种机械元件串联组合后形成的机械系统的机械导纳为M_Σ，合成机械阻抗为Z_Σ。

则：$M_\Sigma=M_m+M_K+M_c$

$$Z_\Sigma=\frac{1}{\frac{1}{Z_m}+\frac{1}{Z_K}+\frac{1}{Z_c}}$$

若上述三元件并联后所组成的机械系统中，合成机械导纳：

$$M_b=\frac{1}{\frac{1}{M_m}+\frac{1}{M_K}+\frac{1}{M_c}}$$

合成机械阻抗：

$$Z_b=Z_m+Z_K+Z_c$$

所得结果与用微分方程解析法所得结果一致，而这种运用初等数学模型的方法则比较简便。

2 铁水凝固时气孔的移出速度

量纳分析就是在基于量纲一致的原则上,分析物理量之间关系从而建立出数学模型的一种方法。用这种方法可从单一的前提条件对某一现象推论出信息，而这一现象能由某些变量中的一个有量纲的、恰当的方程来描述。

在焊接生产中，气孔缺陷是一个很重要的问题，它使重要的零件造成应力集中，裂纹等破坏，所以，求出气孔的移出速度的表达式对熔池的凝固时气泡的影响因素可以加以分析和控制，从而可提高机件的机械性能和质量。

若已知：凝固时熔池的温度为T_0， 重力加速度为g

液态铁水的密度为ρ_1， 液体金属的密度为η

气泡的密度为ρ_2， 气泡的半径为r.

假设： ①气泡在移出的过程中大小不变.

②熔池的温度在气泡移出的过程中保持不变.

③液体金属的粘度保持不变

由移出的速度：$V=\varphi(r,g,\Delta\rho,\eta)$ (1)

其中 $\Delta\rho=\rho_1-\rho_2$

$$V=Kr^{\alpha_1}\cdot g^{\alpha_2}\cdot\Delta\rho^{\alpha_3}\cdot\eta^{\alpha_4} \tag{2}$$

其中 K为无量纲的比例系数，α_1，α_2，α_3，α_4为待定常数.

(1) 式 (2) 式是物理量之间的关系式，它们相应的量纲表达式为：

$$[M\cdot T^{-1}]=[M]^{\alpha_1}\cdot[M\cdot T^{-2}]^{\alpha_2}\cdot[Kg\cdot M^{-3}]^{\alpha_3}\cdot[Kg\cdot T^{-1}M^{-1}]^{\alpha_4} \tag{3}$$

根据等式两端量纲一致的原则

$$[MT^{-1}]=[M]^{\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3-\alpha_4}[Kg]^{\alpha_3+\alpha_4}\cdot[T]^{-2\alpha_2-\alpha_4} \tag{4}$$

即应有：

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3-\alpha_4=1\\ -2\alpha_2-\alpha_4=-1\\ \alpha_3+\alpha_4=0\end{cases} \tag{5}$$

解(5)式得：$\alpha_3=-\alpha_4$，令$\alpha_4=-1$，则$\alpha_3=1$ $\alpha_2=1$ $\alpha_1=2$

即得：$\alpha_1=2$ $\alpha_2=1$ $\alpha_3=1$ $\alpha_4=-1$ 代入(3)式：

$$[MT^{-1}]=[M]^2[M\cdot T^{-2}][kgM^{-3}][kgT^{-1}M^{-1}]^{-1}$$

代入(2)式：

$$V=k\frac{r^2\cdot g\cdot\Delta\rho}{\eta}=k\frac{(\rho_1-\rho_2)gr^2}{\eta}$$

当$K=\frac{2}{q}$时,这与流体力学所得的结果 $V=\frac{2}{q}\ \frac{(\rho_1-\rho_2)gr^2}{\eta}$是一致的.

3 有功功率负荷在已运行机组间的最优分配模型

目前，人们不论从事什么活动都讲究高效益，即希望所采取的策略使某个或某些指标达到最优. 在电力系统中，会遇到一个很重要的优化问题，那就是电力系统中有功功率的最优分布问题，这个问题具体又分为有功功率负荷预计、有功功率电源的最优组合和有功功率负荷在已运行机组间的最优分配等几个方面，这里只仅讨论有功功率负荷在已运行机组间的最优分配问题.

3.1 模型假设：

①设负荷分配只限于两套发电设备之间.

②设两个发电厂的原料的成本相等.

③设各发电设备的能源损耗不受限制．

④设各发电设备的有功为 P_{Gi}，无功为 Q_{Gi}，电压为 u_i 都有上、下限的限制．

⑤设总耗量是各发电设备有功功率 P_{Gi} 的函数，并且不计网络损耗．

3.2 建立模型：

有功功率负荷分配目的在于：在供应同样大小的负荷有功功率（记为$\sum P$）的前提下，单位时间内消耗的能源最少．我们选取的目标函数是总耗量，根据以上假设，我们可以得到此模型的目标函数、等约束条件和不等约束条件，即，目标函数：

$$C = F_{\sum} = F_1(P_{G1}) + F_2(P_{G2}) = C(P_{G1}, P_{G2})$$

其中 $F_i(P_{Gi})$ 表示某发电设备发出有功功率 P_{Gi} 时单位时间内所需消耗能源．

$$\text{等约束条件：} \sum_{i=1}^{2} P_{Gi} - \sum_{i=1}^{n} P_{Ci} = 0,$$

即：

$$f(P_{G1}, P_{G2}) = 0.$$

不等约束条件：

$$P_{Gimin} \leqslant P_{Gi} \leqslant P_{Gimax},$$
$$Q_{Gimin} \leqslant Q_{Gi} \leqslant Q_{Gimax},$$
$$u_{imin} \leqslant u_i \leqslant u_{imax}, \qquad (i = 1,2.)$$

其中 P_{Gi}，Q_{Gi}，u_i 分别为发电机的有功输出、无功输出和机端电压．

根据等约条件和目标函数，建立拉格朗日函数：

$$\begin{aligned} C^* &= C(P_{G1}, P_{G2}) - \lambda f(P_{G1}, P_{G2}) \\ &= F_1(P_{G1}) + F_2(P_{G2}) - \lambda(P_{G1} + P_{G2} - P_{c1} - P_{c2}), \end{aligned}$$

3.3 模型求解：

要求拉格朗日函数的最小值,应满足下列条件：

$$\frac{\partial C^*}{\partial P_{G1}} = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial P_{G2}} = 0, \quad \frac{\partial C^*}{\partial \lambda} = 0$$

即可推得：

$$\frac{\partial F_1(P_{G1})}{\partial P_{G1}} - \lambda = 0$$

$$\frac{dF_2(P_{G2})}{dP_{G2}} - \lambda = 0$$

$$P_{G1} + P_{G2} - P_{C1} - P_{C2} = 0$$

设 $\frac{dF_1(P_{G2})}{dP_{G1}}$，$\frac{dF_2(P_{G2})}{dP_{G2}}$ 分别为发电设备1，2各自承担有功负荷，P_{G1}、P_{G2} 时的耗量微增率 λ_1，λ_2．

则以上条件可以变为：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$P_{G1} + P_{G2} = P_{C1} + P_{C2}$$

3.4 模型分析:

①如上求解的结论就是等耗量微增率准则，在满足不等约束的条件下，按上面的原则分配负荷，则能达到单位时间单位电能所消耗能源最小.

②如果按等耗量准则确定的某发电设备的功率低于其下限 P_{Gimin} 或高于其上限 P_{Gimax} 时该发电设备的应发功率取 P_{Gimin} 或 P_{Gimax}.

③如果多于两台发电设备，同样也可推得微增率原则，即

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_n$$

④如果各发电设备的能源成本费不等，则其目标函数变为:

$C=C(P_{G1},P_{G2})=K_1F_1(P_{G1})+K_2F_2(P_{G2})$，可以得到其微增率原则为:

$$K_1\lambda_1=K_2\lambda_2=\cdots\cdots=K_n\lambda_n.$$

参考文献

〔1〕 [美] C·L 截姆,E·S 艾维. 数学构模原理. 海洋出版社.

〔2〕 [美] 威廉E.博伊斯(Willian E.Boyce)著.天问电脑公司 信息部编译. 建立数学模型实例研究.

〔3〕 姜启源编. 数学模型. 高等教育出版社

〔4〕 谌安琦编著. 科技工程中的数学模型. 中国铁道出版社.

Applying Mathematical Model to Mechanism and Electricity

Ma Guirong Zhang Yonghong

Hou Juncai Li Te

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This article uses the method of mechanical and dimensional analysis to establish the model of transmit...g function of machine components and whole system. And to establish the optimum distribution model of active power load among the moving sets. Doing above so to approach the basic method for building primary and excellent models in mechanism and electricity.

Keywords: mechanical transmission-acceptance, mechanical impedance, active power.