

钢筋混凝土简支深梁受剪承载力的 极限分析*

刘立新

(郑州工学院 土建系)

提 要: 本文讨论了钢筋混凝土简支深梁的剪切破坏形态和主要影响因素, 假定钢筋和混凝土均为刚塑性材料, 引用混凝土双向受压的破坏条件, 求出了集中和均布荷载作用下钢筋混凝土简支深梁受剪承载力的塑性解。根据试验结果给出了考虑混凝土强度和剪跨比影响的深梁混凝土塑性有效抗压系数, 所获得的理论公式与国内外试验结果符合良好。

关键词: 深梁, 剪切强度, 极限分析

中图分类号: Tu312

钢筋混凝土深梁设计是工程实践中经常碰到的课题, 跨高比 $l/h < 2$ 的简支梁或 $l/h < 2.5$ 的连续梁可作为深梁设计。六十年代以来, 国外开始进行钢筋混凝土深梁的试验研究, 欧洲规范 (CEB-FIP) 的设计建议主要基于德国 Leonhardt 和 Walther 等的试验, 美国规范 (ACI318-83) 的设计建议主要基于 Crist, de Paiva 和 Sicss 等的试验, 此外英国和印度等国的学者也进行了较多试验并提出了若干破坏模式和理论分析方法^{(1)~(3)}。

为了弥补我国规范在深梁设计方面的空白, 1978 年以来, 我国钢筋混凝土结构设计规范深梁专题研究组进行了约 700 个深梁的破坏试验, 其中郑州工学院进行了 85 个不开洞深梁和 62 个开洞深梁的试验。在此基础上制定的深梁设计条文已包含在新颁布的混凝土结构设计规范 (GBJ10-89) 和钢筋混凝土深梁设计规程 (报批稿) 中^{(4) (5)}。

试验表明, 随着荷载的增加将首先在深梁跨中出现竖向列裂缝, 随后在靠近支座处出现斜裂缝, 临近破坏时形成变截面拉杆拱受力体系 (图 1a)。当深梁底部 $0.2h$ 范围内的纵向钢筋配筋率大于界限配筋率即 $\rho > \rho_b$ 时, 深梁纵筋将不屈服而发生剪切破坏, 并以斜压破坏形态为主 (图 1b)。 $\rho = A_s / bh$, A_s 为梁底部 $0.2h$ 范围内纵向钢筋面积, b 、 h 分别为深梁的宽度和高度。根据试验结果, 界限配筋率 ρ_b 按下式计算,

$$\rho_b = 0.19 \frac{a}{h} \cdot \frac{f_c}{f_y} \quad (1)$$

式中 a 为剪跨, f_c 为混凝土轴心抗压强度, f_y 为纵筋屈服强度。影响深度梁受剪承载力的

* 收稿日期: 1992-02-17

主要因素有混凝土强度 f_c 、剪跨比 $\lambda = a/h$ ，纵筋配筋率和腹筋配筋率等。试验结果表明，随着 f_c 的增加，受剪承载力 V_u 大体呈线性关系增加；随着剪跨比 λ 的增加， V_u 减少；随着纵筋配筋率 ρ 的增加， V_u 稍有增加，但通常不超过 20%；随着水平腹筋率 ρ_{sh} 和竖向腹筋率的增加， V_u 也稍有增加，但最多不超过 25%。由于深梁剪切破坏形态主要为拱腹的斜压破坏，腹筋的作用主要是通过约束梁腹部的混凝土间接地提高受剪承载力，而不直接承担剪力，且水平腹筋的作用大于竖向腹筋。根据深梁受剪斜压破坏的模式，可得受剪承载力计算的试验公式为

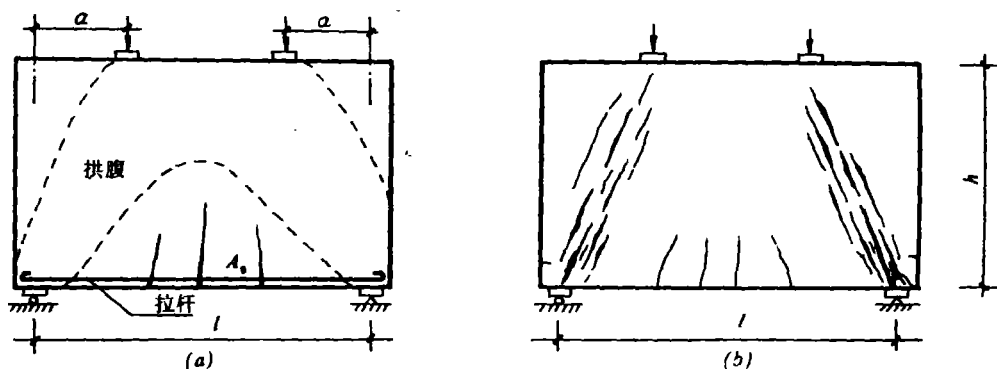


图 1

$$V_u = \frac{0.15}{0.24 + \lambda} (1 + 22\rho_s) f_c b h \quad (2)$$

式中 $\rho_s = \frac{\rho_{sh} \rho_{sv} \lambda^2}{1 + \lambda^2}$ 。(2) 式计算值与试验值比较， $n = 197$ ， $\mu = 1.133$ ， $\delta = 0.17$ 。列入新规范 (GBJ10-89) 的设计公式为

$$V \leq 0.12[1 + 22(\rho + \rho_{sh})] f_c b h \quad (3)$$

截面限制条件为

$$V \leq 0.15 f_c b h \quad (4)$$

七十年代以来，丹麦学者 M.P.Nielsen 等用刚塑性理论和修正的混凝土库仑屈服条件解决了一些混凝土强度问题，其中包括梁的受剪承载力计算^[6]。我国蒋大骅也推导了符合试验结果的梁的受剪承载力计算的塑性解^[7]。本文是在试验研究的基础上引用混凝土双向受压的破坏条件，用塑性极限分析的方法对深梁的受剪机理和承载力作进一步的分析。

1 基本假定

1.1 钢筋为理想的刚塑性材料，其抗拉抗压屈服强度 f_y 与 f_y' 相等，其应力应变曲线如图 2a 所示。

1.2 混凝土受压时也视为刚塑性材料，其单向受压时的应力应变曲线如图 2b 所示。考虑到混凝土塑性变形能力有限，实际应力应变关系中存在下降段，以塑性有效抗压强度 νf_c 代替 f_c ， ν 称为混凝土塑性有效抗压系数，可由试验结果确定。

1.3 混凝土双向受压时的破坏条件符合 Lin, Slate 等提出的模式, 如图 2c 所示⁽⁸⁾。取压应力为正, 并有考虑混凝土的抗拉强度。

$$AB \text{ 段: } \sigma_2 = f_c + \frac{\sigma_1}{1.2} \quad (0 < \sigma_1 < 0.24f_c) \quad (5)$$

$$BC \text{ 段: } \sigma_2 = 1.2f_c \quad (0.24f_c \leq \sigma_1 \leq 1.2f_c) \quad (6)$$

图 3 是厚度为 1 的刚性材料平片 I、II 通过宽度为 δ 的塑性域 $abcd$ 相连。若刚片 II 相对刚片 I 产生剪切位移 v , v 与 x 轴方向的夹角为 $90^\circ - \beta$, 则塑性区的应变为

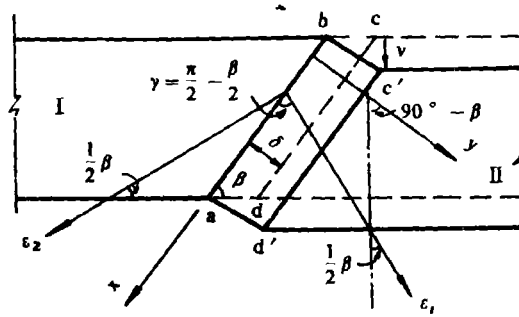
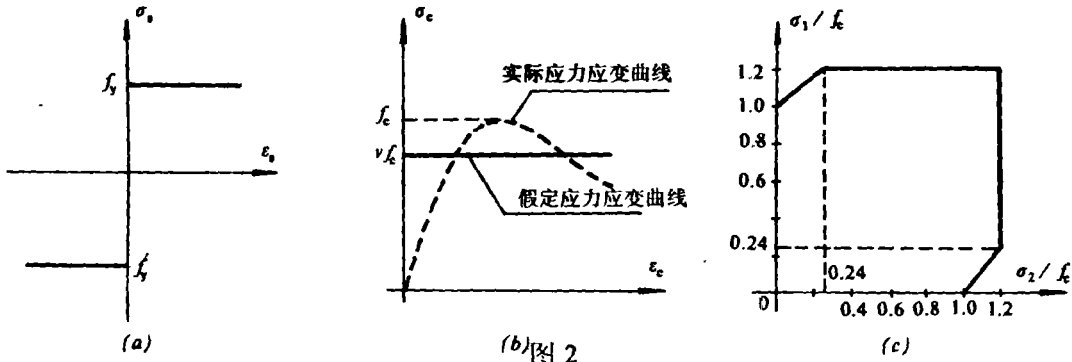


图 3

$$\varepsilon_x = 0 \quad \varepsilon_y = \frac{v \cos \beta}{\delta} \quad \gamma_{xy} = \frac{v \sin \beta}{\delta} \quad (7)$$

相应的主应变为

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{v}{2\delta} (\cos \beta + 1) \quad \varepsilon_2 = -\frac{v}{2\delta} (\cos \beta - 1) \quad (8)$$

此处为与图 2c 相对应, 取主压应变为正, 主拉应变为负。 ε_1 与 x 轴的夹角 γ 可由下式求出,

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = -\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\pi - \beta) \quad (9)$$

即 $\gamma = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$ 。由图 3 的几何关系可以证明, ε_1 的方向平分 v 与 y 方向的夹角, ε_2 与刚片 I、II 下边缘的夹角为 $\frac{1}{2}\beta$ 。沿 ab 单位长度的塑性功为

$$w_i = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2) \delta = -\frac{1}{2} \sigma_1 v (\cos \beta + 1) - \frac{1}{2} \sigma_2 v (\cos \beta - 1) \quad (10)$$

2 集中荷载作用下深梁受剪承载力的塑性解

2.1 下限解

图4为承受剪力 V 的深梁的一部分,梁高为 h ,厚度为 b ,净剪跨为 a_n ,梁底纵筋截面积为 A_s ,水平腹筋率为 ρ_{sh} ,竖向腹筋率为 ρ_{sv} ,腹筋屈服强度为 f_y .将该梁段划分为6个区域,I、II区应力为零,IV、V区为双向受等压区,VI区为纵向受拉钢

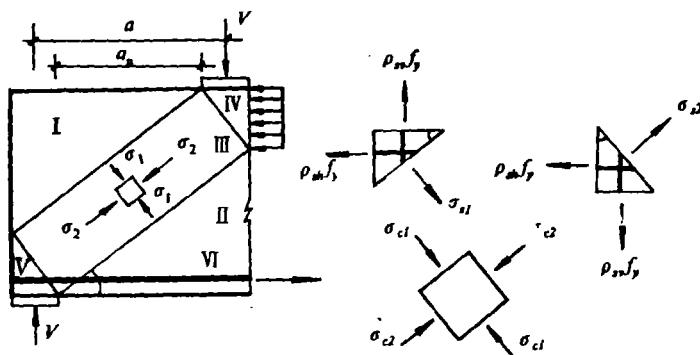


图4

筋单向受拉区, III区为混凝土受腹筋约束的斜向受压区。在纵筋的强度, 锚固及局部承压强度均能保证的前提下, 当III区的混凝土达到腹筋约束下的极限强度时, 梁竖直截面所能承受的剪力即为深梁静力容许的剪力。设III区长边和梁底的夹角为 θ , 取压应力为正, 拉应力为负, 当水平腹筋和垂直腹筋的拉应力都达到 f_y 时, 可求得腹筋应力在 σ_1 、 σ_2 方向的投影为

$$\sigma_{s1} = -(\rho_{sv} f_y \cos^2 \theta + \rho_{sh} f_y \sin^2 \theta) \quad (11)$$

$$\sigma_{s2} = -(\rho_{sv} f_y \sin^2 \theta + \rho_{sh} f_y \cos^2 \theta) \quad (12)$$

混凝土所受腹筋约束力 σ_{c1} 、 σ_{c2} 和 σ_{s1} 、 σ_{s2} 的大小相等方向相反,

$$\sigma_{c1} = \rho_{sv} f_y \cos^2 \theta + \rho_{sh} f_y \sin^2 \theta \quad (13)$$

$$\sigma_{c2} = \rho_{sv} f_y \sin^2 \theta + \rho_{sh} f_y \cos^2 \theta \quad (12)$$

由(5)、(6)式可求得混凝土斜向受压屈服时的最大压应力为:

$$f_c + \frac{1}{1.2}(\rho_{sv} f_y \cos^2 \theta + \rho_{sh} f_y \sin^2 \theta) \leq 1.2 f_c \quad (15)$$

沿III区斜向总的压应力为

$$\sigma_2 = f_c + \frac{\sigma_1}{1.2} + \sigma_{c2} + \sigma_{s2} = f_c + \frac{1}{1.2}(\rho_{sv} f_y \cos^2 \theta + \rho_{sh} f_y \sin^2 \theta) \leq 1.2 f_c \quad (16)$$

沿 σ_1 方向总的应力为

$$\sigma_1 = \sigma_{c1} + \sigma_{s1} = 0 \quad (17)$$

竖直截面的剪应力为

$$\tau = (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \theta \cos \theta = [f_c + \frac{1}{1.2}(\rho_{sv} f_y \cos^2 \theta + \rho_{sh} f_y \sin^2 \theta)] \sin \theta \cos \theta \quad (18)$$

截面承受的总剪力 V 为

$$V = \tau \cdot b(h - a_n \tan \theta) = \tau b h (1 - \lambda_n \tan \theta) \quad (19)$$

式中 $\lambda_n = a_n / h$ 称净剪跨比, 将18式代入化简得

$$V = f_c b h \left[1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{f_c} \cos^2 \theta + \frac{\rho_{sh} f_y}{f_c} \sin^2 \theta \right) (\cos \theta \sin \theta - \lambda_n \sin^2 \theta) \right] \leq 1.2 f_c b h (\cos \theta \sin \theta - \lambda_n \sin^2 \theta) \quad (20)$$

为求 V 的极大值, 令 $\frac{dV}{d\theta} = 0$, 则有

$$f_c b h \left\{ \left[1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{f_c} \cos^2 \theta + \frac{\rho_{sh} f_y}{f_c} \sin^2 \theta \right) \right] (\cos 2\theta - \lambda_n \sin 2\theta) + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{f_c} - \frac{\rho_{sh} f_y}{f_c} \right) \sin 2\theta (\cos \theta \sin \theta - \lambda_n \sin^2 \theta) \right\} = 0 \quad (21)$$

由上式中可见, 当 $\rho_{sh} = \rho_{sv}$ 时, 括号内第二项为零, 当 $\rho_{sh} \neq \rho_{sv}$ 时, 因 ρ_{sh} 、 ρ_{sv} 的值很小, 二者之差也接近于零。为简化计算, 可略去括号内第二项得

$$\tan 2\theta = \frac{1}{\lambda_n} \quad (22)$$

将22式代入20式, 并以 $v f_c$ 代替 f_c , 即得到 V 的下限解为

$$V = \frac{0.5}{\sqrt{1 + \lambda_n^2} + \lambda_n} v f_c b h \left[1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{v f_c} \cos^2 \theta + \frac{\rho_{sh} f_y}{v f_c} \sin^2 \theta \right) \right] \leq \frac{0.6}{\sqrt{1 + \lambda_n^2} + \lambda_n} f_c b h \quad (23)$$

2.2 上限解

考虑承受剪力的深梁段发生图5所示的破坏机构, 由10式可求得沿屈服面 ab 的塑性内功为

$$W_i = \left[-\frac{1}{2} \sigma_1 v (\cos \beta + 1) - \frac{1}{2} \sigma_2 v (\cos \beta - 1) \right] \frac{bh}{\sin \beta} \quad (24)$$

将16、17式代入, 并注意到 $\lambda_n = \frac{a}{h} = \tan \beta$ 可得

$$W_i = \frac{0.5v}{\sqrt{1 + \lambda_n^2} + \lambda_n} f_c b h \left[1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{f_c} \cos^2 \theta + \frac{\rho_{sh} f_y}{f_c} \sin^2 \theta \right) \right] \leq \frac{0.6v}{\sqrt{1 + \lambda_n^2} + \lambda_n} f_c b h \quad (25)$$

相应的外功为

$$W_e = V \cdot v \quad (26)$$

令 $W_e = W_i$, 并以 $v f_c$ 代替 f_c 即求 V 的上限解与23式完全相同, 即23式为精确解。

在实际应用中为简化计算, 以 $\rho_s = \frac{1}{2}(\rho_{sh} + \rho_{sv})$ 代替22式中的 ρ_{sh} 及 ρ_{sv} , 并偏安全以计算剪跨比 $\lambda = a/h$ 代替净剪跨比, 则可得到深梁在集中荷载作用下的受剪承载力公式为

$$V_u = \frac{0.5}{\sqrt{1 + \lambda^2} + \lambda} v f_c b h \left(1 + \frac{1}{1.2} \frac{\rho_s f_y}{v f_c} \right) \leq \frac{0.6}{\sqrt{1 + \lambda^2} + \lambda} v f_c b h \quad (27)$$

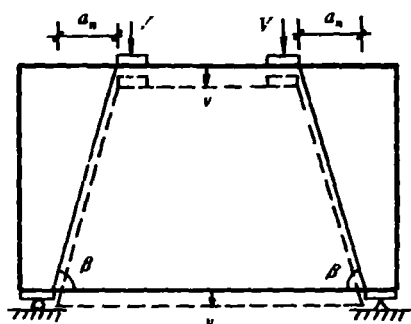


图5

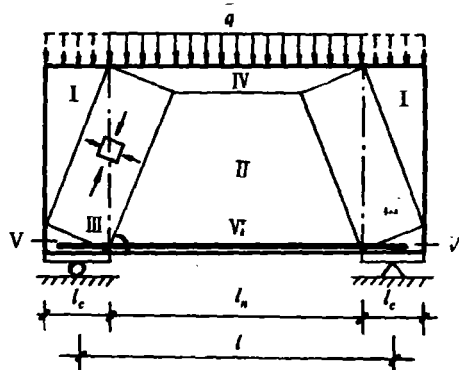


图6

3 均布荷载作用下深梁受剪承载力的塑性解

3.1 下限解

图6为一承受均布荷载作用的简支深梁(l_c 为支承长度),与集中荷载作用时类似,将其划分为6个区域,其中Ⅲ区的正应力 σ_1 、 σ_2 和剪应力 τ 分别与16、17、18式相同,竖直截面 aa 承拉的总剪力为

$$V = \tau b h = 0.5 f_c b h \left[1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{f_c} \cos^2 \theta + \frac{\rho_{sh} f_y}{f_c} \sin^2 \theta \right) \right] \sin 2\theta \quad (28)$$

为使 V 最大,令 $\frac{dV}{d\theta} = 0$. 当 $l_n \geq h$ 时可得 $\theta = 45^\circ$,相应的静力容许的应力场如图7所示,以 $v f_c$ 代替 f_c 即可得到 $l_n \geq h$ 的下限解为

$$V = 0.5 v f_c b h \left[1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{f_c} \cos^2 \theta + \frac{\rho_{sh} f_y}{f_c} \sin^2 \theta \right) \right] \leq 0.6 v f_c b h \quad (29)$$

当 $l_n < h$ 时,静力容许的应力场如图8所示, $\sin 2\theta$ 的最大值为

$$\sin 2\theta = \frac{l_n}{h} \quad (30)$$

其下限解为

$$V = 0.5 v f_c b l_n \left[1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{f_c} \cos^2 \theta + \frac{\rho_{sh} f_y}{f_c} \sin^2 \theta \right) \right] \leq 0.6 v f_c b l_n \quad (31)$$

3.2 上限解

考虑承受均布荷载的简支深梁发生图9所示的破坏机构,剪切屈服而与梁底面的夹角 $\beta = 90^\circ$,利用16、17及24式可求得沿屈服面 $abcy cd$ 的塑性内功为

$$W_i = f_c b h \left[1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{\rho_{sv} f_y}{f_c} \cos^2 \theta + \frac{\rho_{sh} f_y}{f_c} \sin^2 \theta \right) \right] \cdot v \quad (32)$$

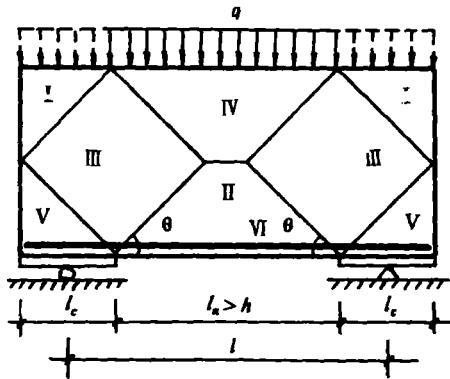


图7

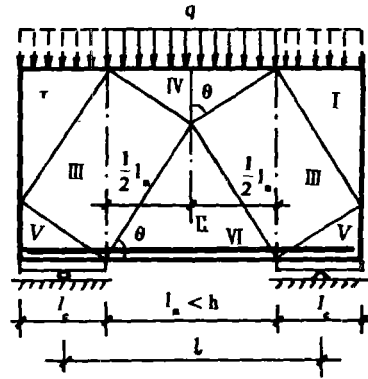


图8

相应的外功为

$$W_e = ql_n \cdot v = 2V \cdot v \quad (33)$$

令 $W_e = W_i$ ，并以 $v f_c$ 代替 f_c 即可得到 V 的上限解与 29 式相同。当 $l_n < h$ 时按 29 式计算的上限解偏高，因为此时深梁如同一受压短柱，将发生短柱式压毁而不发生剪切破坏，其相应的剪力应按 31 式计算。近似以 $\rho_s = \frac{1}{2}(\rho_{sv} + \rho_{sh})$ 代替 29.31 式中的 ρ_{sv} 及 ρ_{sh} ，则均布荷载作用下深梁的受剪承载公式为

$$\text{当 } l_n \geq h \text{ 时 } V_u = 0.5v f_c b h \left(1 + \frac{1}{1.2} \frac{\rho_s f_y}{v f_c}\right) \leq 0.6v f_c b h \quad (34)$$

$$\text{当 } l_n < h \text{ 时 } V_u = 0.5v f_c b l_n \left(1 + \frac{1}{1.2} \frac{\rho_s f_y}{v f_c}\right) \leq 0.6v f_c b l_n \quad (35)$$

4 混凝土的塑性有效抗压系数

由于混凝土并非完全的塑性材料，塑性极限分析中对混凝土的假定与实际情况有一定差异，需引入混凝土的塑性有效抗压系数 v 进行修正。Nielsen 等根据浅梁的试验结果，认为 v 值随混凝土强度的提高而降低，建议 v 可按式计算

$$v = 0.8 - \frac{f_c}{165} \quad (36)$$

式中 f_c 为混凝土轴心抗压强度，以 N/mm^2 计。

深梁的受剪试验结果表明，深梁混凝土的 v 值不仅与 f_c 有关，而且还与剪跨比 λ 有关。根据深梁专题组的试验结果（图 10），本文建议深梁混凝土的 v 值按下式计算

$$v = \frac{1}{0.878 + \frac{f_c}{102\lambda}} \leq 1 \quad (37)$$

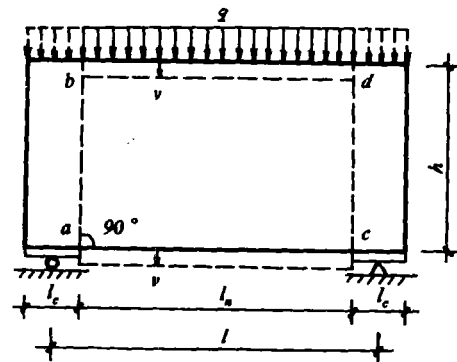


图9

式中 f_c 的单位仍为 N/mm^2 , $\lambda = a/h$, 对均布荷载可取 $a = \frac{1}{4}l$.

按 37 和 27 式计算的集中荷载作用下深梁的受剪承载力与试验结果的比较如图 11 所示, $n=112$, 试验值/计算值的均值 $\mu=1.045$, $\delta=0.157$ 符合程度优于 2 式. 按 37 和 34、35 式计算的均布荷载作用下深梁的受剪承载力与试验结果的比较如图 12 所示 $n=24$ $\mu=1.101$ $\delta=0.0097$ 符合是较好的.

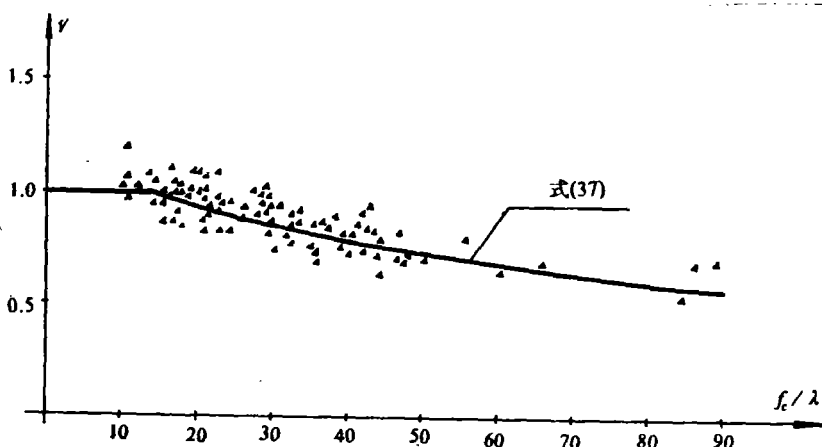


图 10

5 结论

5.1 塑性极限分析求得的深梁受剪承载力计算公式与试验结果符合良好, 集中荷载作用下可按 27 式计算, 均布荷载作用下可按 34、35 式计算.

5.2 深梁混凝土的塑性有效抗压系数与混凝土强度和剪跨比有关, 可按 37 式计算.

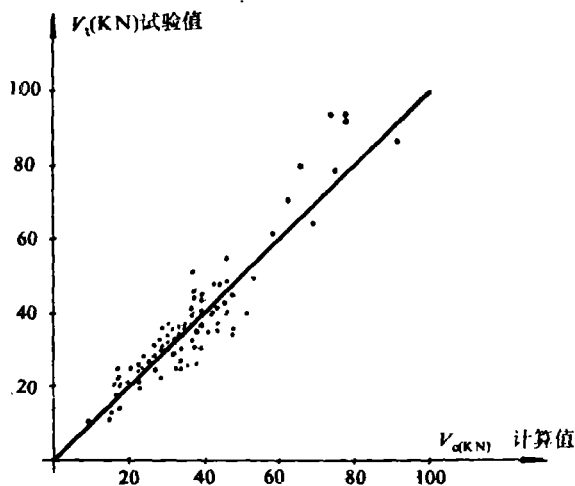


图 11

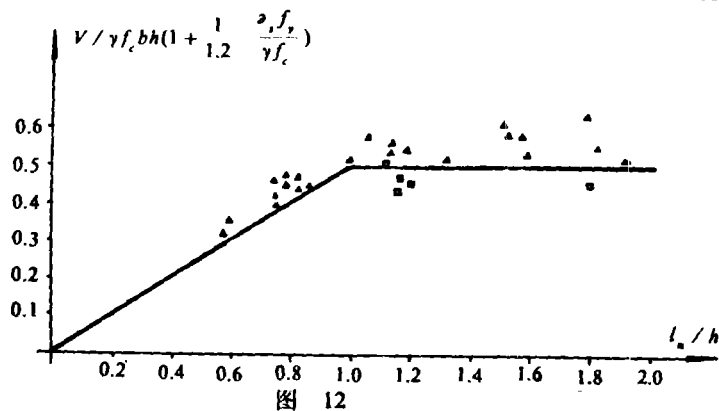


图 12

参 考 文 献

- (1) de Paiva H.A.R. and Sicss C.P, Strength Behaviour of Deep Beams in shear, Journal of the Structural Division, ASCE. Vol. 91.St5, Oct.1965.
- (2) Smith K.N. and Vantsiotis A.S, Shear Strength of Deep Beams, proc. ACI, Vol 79, Mag / June, 1982, pp201~213.
- (3) Kong F.K, The Design of Reinforced Concrete Deep Beams in Current Practice, The Structural Engineer, Vol. 53. Apr. 1975.
- (4) 混凝土结构设计规范(GBJ10-89)
- (5) 钢筋混凝土深梁设计规程(报批稿).1991
- (6) Neilsen M.P, Limit Analysis and Concrete plasticity, Denmark Technical University, 1984.
- (7) 蒋大骅, 钢筋混凝土抗剪强度的塑性解, 同济大学学报, 1979.
- (8) T.C.Liu ,et al, Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Axial and Biaxial compression, Journ. of ACI. May, 1972.

Limit Analysis for Shear Capacity of Simple Supported R.C. Deep Beams

Liu Lixin

(Department of Civil Engineering, Zhengzhou Institute of Technology)

abstract: In this paper, based on the experimental results, the stress characteristics, the shear failure modes and the principle factors influencing shear capacity of simple supported R.C. deep beams under concentrated and uniform load are discussed.

Assuming that both reinforcement and concrete are rigid-plastic materials, using the failure criterion of concrete in biaxial compression, the plastic solution for shear capacity of deep beams are obtained. The effective compression factor ν of concrete in deep beams is also given. The suggested formulas predicting the shear capacity of deep beams show a good agreement with tested results.

Keywords: Deep Beams Shear strength. Limit Analysis.