第13卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.13 No.3
1992年 9 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1992

泛函变分基本公式的分析推导*

黄世强

(郑州工学院数力系)

摘 要: 本文使用分析方法推导出具有可变端点的泛函变分基本公式.

关键词: 变分; 可变端点.

中国图书分类号: O177

在具有可变端点的变分问题的讨论中，泛函一阶变分基本公式起着根本的作用. [1, 2]中使用几何方法导出了泛函:

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx$$

在端点可变时的一阶变分基本公式; [3]中先用延拓函数后用几何方法推导出变分基本公式. 本文在最一般的形式下，使用分析方法推导出有可变端点时泛函一阶变分基本公式.

1 引理

考虑泛函

$$J[\Gamma]\underline{\triangle}J[y]=\int_{\Gamma}F(x, y, y')dx \tag{1}$$

J[y]的定义域 E 是可取曲线 Γ: $y=y(x)\in C^2$ 类函数，E 中诸曲线的端点是在一定范围内可以任意移动的.

设 E 中曲线 Γ: $y=y(x)$的左、右端点分别为点$A(x_0, y_0)$, 及点$B(x_1, y_1)$而 E 中曲线$\bar{\Gamma}$: $y=\bar{y}(x)$的左、右端点分别为$\bar{A}(x_0+\delta x_0, \bar{y}(x_0+\delta x_0))$及$\bar{B}(x_1+\delta x_1, \bar{y}(x_1+\delta x_1))$, 以 $\delta y\in C^1$ 表示曲线 Γ 变成$\bar{\Gamma}$时函数 $y=y(x)$的变分，当自变量 x 位于 $y(x)$与$\bar{y}(x)$的公共定义区间上时，$\delta y=\bar{y}(x)-y(x)$, 而当 x 位于$\bar{y}(x)$与 $y(x)$的公共定义区间外时，δy 是任意的 C^1 类函数.

引理 设$F\in C^2$, $J[y]$ 的可取曲线 Γ 的左端点 $A(x_0, y_0)$固定，Γ 的右端点 $B(x_1, y_1)$可变动时，泛函(1)的一阶变分为

* 收稿日期: 1991-07-05

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta ydx+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+(F-y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 \qquad (2)$$

其中δy_1 是 $y=y(x)$ 在点 $B(x_1, y_1)$处纵坐标 y_1 的变分.

证明 考虑到 $y=\bar{y}(x)$ 与 $y=y(x)$ 的定义区间可能不同，我们分两种情况来讨论.

先设$\delta x_1\geqslant 0$. 当可取曲线由 Γ 变到$\bar{\Gamma}$时，泛函 $J[y]$ 的改变量

$$\begin{aligned}\triangle J&=J[\bar{\Gamma}]-J[\Gamma]\\&=\int_{\bar{\Gamma}}F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx-\int_{\Gamma}F(x, y, y')dx\\&=\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}F(x, \bar{y}, y)dx-\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}[F(x, y, +\delta y, y'+\delta y')-F(x, y, y')]dx\\&+\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1}F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx\end{aligned}$$

对上式第一项中被积函数使用 Taylor 中值公式，对第二项使用积分中值公式，得[1]

$$\triangle J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta ydx+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y(x_1)+F(x, y, y')|_{x=x_1}\delta x_1+R_1+\varepsilon_1\delta x_1$$

其中 R_1 是较 δy 及 $\delta y'$更高阶的无穷小，当$\delta x_1\to 0$, $\delta y_1\to 0$ 时，$\varepsilon_1\to 0$

于是，由变分定义[3]

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_y)\delta ydx+F_y|_{x=x_1}\delta y(x_1)+F(x, y, y')|_{x=x_1}\delta x_1 \qquad (3)$$

在 Γ 的右端点 $B(x_1, y_1)$附近，纵坐标的改变量为

$$\begin{aligned}\triangle y&=\bar{y}(x_1+\delta x_1)-y(x_1)\\&=\bar{y}(x_1)+y'(x_1)\delta x_1+(1/2)\bar{y}''(x_1+\theta_1\delta x_1)\delta^2x_1-y(x_1)\end{aligned}$$

其中$0<\theta_1<1$,

因为$\bar{y}(x_1)=y(x_1)+\delta y(x_1)$, $\bar{y}'(x_1)=y'(x_1)+\delta y'(x_1)$，所以纵坐标的增量可写成

$$\triangle y=\delta y(x_1)+y'(x_1)\delta x_1+\delta y'(x_1)\delta x_1+\varepsilon_2$$

其中 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}\bar{y}''(x_1+\theta\delta x_1)\delta^2x_1$ 是较 δx_1 高阶的无穷小. 当$\bar{B}\to B$ 时，$\delta x_1\to O$, $\delta y(x_1)\to O$, $\delta y'(x_1)\to O$. 于是

$$\delta y_1 = \delta y(x_1) + y'(x_1)\delta x_1$$

亦即

$$\delta y(x_1) = \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1 \tag{4}$$

把(4)代入(3)，依泛函变分的定义[3]，得式(2)

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx + F_{y'}\delta y_1|_{x=x_1} + (F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1.$$

次设$\delta x_1 < 0$. 这时，

$$\triangle J = \int_{\bar{\Gamma}} F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx - \int_{\Gamma} F(x, y, y')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} [F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y')]dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y, y')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y, y')dx$$

重复前面$\delta x_1 \geqslant 0$时的作法，可得

$$\triangle J = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx + F(x, y, y')|_{x=x_1} + R_2 + \varepsilon_3\delta x_1 \tag{5}$$

其中 R_2 是较 δy，$\delta y'$高阶的无穷小. 当$\bar{B} \to B$ 时，$\delta x_1 \to 0$，$\delta y_1 \to 0$，$\varepsilon_3 \to 0$. 因为

$$\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx + F_{y'}\delta y|_{x=x_1+\delta x_1}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_y)\delta y dx + R_3 + F_{y'}|_{x=x_1+\delta x_1}\delta y(x_1+\delta x_1) \tag{6}$$

注意到 $F \in C^2$，知$R_3 = \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} + (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx$是较 δy 高阶的无穷小. 这时曲线Γ右端点纵坐标的改变量

$$\triangle y=\bar{y}(x_1+\delta x_1)-y(x_1)$$
$$=\bar{y}(x_1+\delta x_1)-y(x_1+\delta x_1)+y(x_1+\delta x_1)-y(x_1)$$
$$=\delta y(x_1+\delta x_1)+y(x_1)+y'(x_1)\delta x_1+\varepsilon_4\delta x_1-y(x_1)$$
$$=\delta y(x_1+\delta x_1)+y'(x_1)\delta x_1+\varepsilon_4\delta x_1$$

其中$\varepsilon_4\to 0$，当 $\delta x_1\to 0$时．于是函数 $y=y(x)$ 在右端点处有变分

$$\delta y_1=\delta y(x_1+\delta x_1)+y'(x_1)\delta x_1$$

亦即
$$\delta y(x_1+\delta x_1)=\delta y_1-y'(x_1)\delta x_1 \tag{7}$$

把(7)代入(6)，并把 $F(x, y, y'(x))$视为 x 的函数，在 x_1，处应用 Taylor 公式，得

$$\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx+R_3+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+(F-y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1+\varepsilon_5\delta x_1$$
$$+R_2+\varepsilon_3\delta x_1 \tag{8}$$

其中$\varepsilon_5\to 0$，$\delta x_1\to 0$，$\delta y_1\to 0$，当 $\bar{B}\to B$时．

把(8)代入(5)，注意到泛函变分的定义 [3]，就得(2)式． 证毕

2 泛函一阶变分基本公式

定理 设函数$F\in C^2$，则具有可变端点的泛函(1)在 $y=y(x)$ 处的一阶变分为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+(F-y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1$$
$$-Fy'|_{x=x_0}\delta y_0-(F-y'F_{y'})|_{x=x_0}\delta^{x_0} \tag{9}$$

其中$[x_0, x_1]$为 $y=y(x)$ 的定义区间，δy_0 是 $y=y(x)$ 在点 $A(x_0, y_0)$ 处纵坐标的变分，δy_1 是 $y=y(x)$ 在点 $B(x_1, y_1)$处纵坐标的变分．

证明 引理已给出当 Γ 的左端点固定，右端点可任意移动时(1)的变分基本公式(2)。仿照引理中的讨论，可得当 Γ 的右端点固定，左端点可任意移动时泛函(1)的一阶变分基本公式

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}Fy')\delta y dx-F_{y'}|_{x=x_0}\delta y_0-(F-\frac{d}{dx}F_{y'})|_{x=x_0}\delta x_0 \tag{10}$$

最后，把两种情况结合起来，就得出可取曲线的左、右端点均可任意移动时，泛函(1)的一阶变分基本公式(9)．

3. 推广

上述方法可以毫无困难地应用结构较复杂的泛函．例如

$$J[\Gamma]=J[y_1,\cdots,y_n]=\int_{\Gamma}F(x,y_1,\cdots,y_n,y'_1,\cdots,y'_n)dx$$

其中 $F\in C^2$．Γ是 $n+1$ 维空间中某区域内具有可变端点的曲线时，$J[y_1,\cdots,y_n]$ 的一阶变分基本公式为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{k=1}^{n}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})\delta y_k dx+\sum_{k=1}^{n}F_{y'_k}|_{x=x_1}\delta y_{1k}+(F-\sum_{k=1}^{n}y'_kF_{y'_k})|_{x=x_1}\delta x_1-\sum_{k=1}^{n}F_{y'_k}|_{x=x_0}\delta y_{0k}-(F-\sum_{k=1}^{n}y'_kFy'_k)|_{x=x_0}\delta x_0 \quad (11)$$

对于泛函 $J[\Gamma]=J(y,y',y'')\int_{\Gamma}F(x,y,y',y'')dx$

其中$F\in C^3$．当Γ为J[y]的可取函数空间中具有可变端点的曲线时，J[y]在 $y=y(x)$ 处的一阶变分基本公式为

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}Fy'+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''})\delta y dx+F_{y''}|_{x=x_1}\delta y'_1+(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''})|_{x=x_1}\delta y_1+(F-y''F_{y''}-y'Fy''+y'\frac{d}{dx}F_{y''})|_{x=x_1}\delta x_1-F_{y''}|_{x=x_0}\delta y'_0-(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''})|_{x=x_0}\delta y_0-(F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{d}{dx}F_{y''})|_{x=x_0}\delta x_0 \quad (12)$$

其中δy_1，δy_0 的意义如前，$\delta y'_1$ 为 $\delta y'(x)$ 在 $B(x_1,y_1)$ 处的变分，$\delta y'_0$ 为 $y'(x)$ 在 $A(x_0,y_0)$处的变分．

参　考　文　献

〔1〕 艾利斯哥尔兹著．变分法．人民教育出版社．1958年第一版．

〔2〕 吴迪光．变分法．高教出版社．1987年第一版．

〔3〕 Гельфанд ч фомИн Курс Варчацчонного Цсцчсльнчя. 1960.

Analytic Demonstration of Fuctionnal Variational Basic Formulation

Huang Shiqiang

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This paper get fuctronal Variational basic formulation with the Variation end——point under the general forms by using analytic demonstration vaviable end–point

Keywords: Variation, variable end–point